Глава 6

Оптимизация инвестиционного портфеля

В данной главе рассматривается индивидуальный инвестор и анализ, с его точки зрения, задачи оптимизации инвестиционного портфеля. Теорию по этому вопросу и много практических примеров можно найти в [1]. Здесь же внимание сосредоточено на реализации вычислительных процедур в электронных таблицах, а также исследуются основные типы задач портфельной оптимизации. Основным инструментом получения весов для высокорисковых инвестиционных портфелей является надстройка Поиск решения (Solver), тогда как для распределения средств между высокорисковыми и безрисковыми активами лучше использовать специальные функции. В разделах 6.1 и 6.2 представлен важный вводный материал для высокорисковых портфелей. В разделах 6.3–6.5 описывается определение оптимальных пропорций инвестирования. В разделе 6.6 рассматривается проблема компромисса между риском и доходностью и понятие несклонности инвестора к риску, а в разделах 6.7–6.9 приводится решение основных задач портфельной теории в Excel. Данная глава заканчивается подробной информацией об определенных пользователем функциях и макросах из рабочей книги `Equity1.xls`, разработанных для анализа инвестиционного портфеля.

6.1 Средняя доходность и дисперсия портфеля

Модель выбора портфеля на основе средней доходности и дисперсии портфеля подробно объясняется и обсуждается во многих учебниках по инвестициям (например, [1]). Марковиц свел задачу оптимизации к поиску эффективных портфелей в контексте соотношения “средняя доходность–дисперсия”, где эффективные точки — это точки, характеризующиеся максимальной ожидаемой доходностью для заданного уровня риска. В данной главе риск портфеля будет измеряться дисперсией (или, более строго, квадратным корнем из дисперсии — стандартным отклонением доходности активов в портфеле). При разработке моделей портфеля из набора активов используются две идеи:

- среднее и дисперсия доходности активов в портфеле как основные характеристики портфеля;
- параллельное представление портфелей в координатах "риск–доходность".

Предполагается, что средства инвестора полностью инвестированы в портфель, а кроме того на веса (пропорции инвестирования w_i) активов накладывается ограничение, предусматривающее, что их сумма равна 100%.

Для любого набора n высокорисковых активов и набора весов, описывающих распределение средств между этими активами в портфеле, справедливы общие соотношения, приведенные ниже.

Доходность портфеля: $$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i).$$

Дисперсия портфеля: $$\mathrm{Var}(r_p) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{cov}(i,j), \text{ где } \mathrm{cov}(i,i) = \sigma_i^2.$$

Здесь $E(r_i)$ — ожидаемая доходность для i-го актива, σ_i — риск (стандартное отклонение доходности) для i-го актива. Элементы $\mathrm{cov}(i,j)$ составляют так называемую дисперсионно-ковариационную матрицу активов. Дисперсия портфеля, как видно из функции, является квадратичной функцией относительно весов портфеля. Риск портфеля, измеряемый стандартным отклонением, равен квадратному корню из дисперсии.

В электронных таблицах эффективнее работать с выражениями для доходности и риска портфеля, которые пользователь может вводить самостоятельно. Так как формулы с суммами практически не подходят для ввода в одну ячейку, применяется два альтернативных подхода: формулы на основе умножения векторов и матриц в Excel и специальные функции, которые можно вызвать из рабочей книги.

Сначала рассмотрим формулы в ячейках. Если ожидаемая доходность и веса портфеля представлены в виде векторов-столбцов (обозначенных соответственно как $\mathbf{e}$ и $\mathbf{w}$, тогда как вектор-строка — это транспонированный вектор $\mathbf{e}^{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{w}^{\mathbf{T}}$), а дисперсионно-ковариационная матрица обозначена как $\mathbf{V}$, то показанные выше формулы можно записать в простой матричной форме. Их можно легко реализовать с помощью функций массива Excel.

	Матричная формула	Формула Excel
Доходность портфеля	$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}$	`=СУММПРОИЗВ(w;e)` (`SUMPRODUCT(w,e)`)
Дисперсия портфеля	$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}\mathbf{w}$	`=МУМНОЖ(ТРАНСП(w);МУМНОЖ(V;w))` (`MMULT(TRANSPOSE(w),MMULT(V,w))`)

На рис. 6.1. представлены вычисления для трех классов активов: казначейские векселя, облигации корпораций, акции. Данные представляют характеристики трех классов активов США за период с 1926 по 1992 год, полученные из функций Excel `СТАНДОТКЛОН()` (`STDEV()`) и `СРЗНАЧ()` (`AVERAGE()`) для данных процентной годовой доходности. В текущий момент портфель разделен между этими тремя типами активов в соотношении 40%: 50%: 10%. Если диапазоны ячеек для ожидаемой доходности (C5:C7) и весов (I10:I12) принять за $\mathbf{e}$ и $\mathbf{w}$ соответственно, а диапазон ячеек для ковариационной матрицы (C15:E17) принять за $\mathbf{V}$, то показанные выше формулы Excel вычисляют доходность и дисперсию портфеля. Таким образом, портфель с пропорциями 40%: 50%: 10% имеет ожидаемую доходность 2,2% (ячейка I15) и риск 7,0% (ячейка I16), полученный как квадратный корень из дисперсии 0,0049 (ячейка I18).

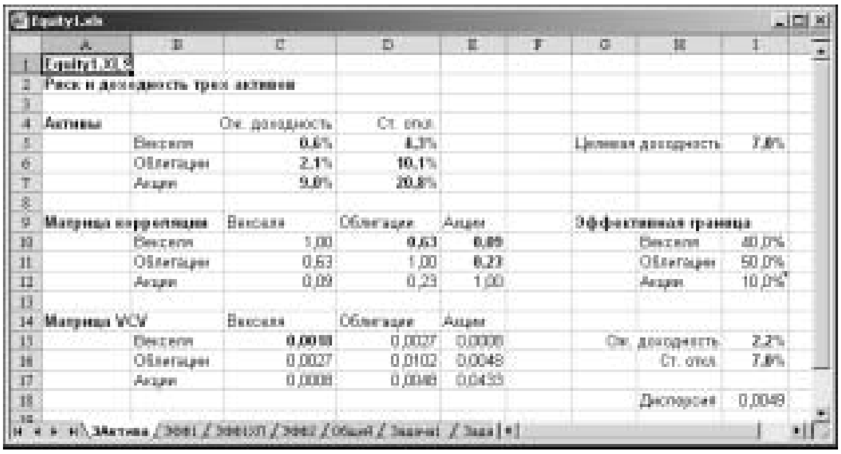


Рис. 6.1. Вычисление риска и доходности для портфеля из трех активов

Входные данные для этих вычислений включают дисперсионно-ковариационную матрицу для трех наборов доходностей. Элементы этой матрицы получены из корреляций между каждой парой классов активов (ячейки C10:E12) и стандартных отклонений активов (D5:D7). Обратите также внимание, что на рис. 6.1 используется следующая формула для получения каждого элемента дисперсионно-ковариационной матрицы:

```
=C11*ВПР(C$14;$B$5:$D$7;3;ЛОЖЬ)*ВПР($B16;$B$5:$D$7;3;ЛОЖЬ)
=C11*VLOOKUP(C$14,$B$5:$D$7,3,FALSE)*VLOOKUP($B16,$B$5:$D$7,3,
FALSE)
```

Здесь вычисляется ковариация казначейских векселей и облигаций: это произведение соответствующей корреляции в ячейке C11 и двух соответствующих стандартных отклонений (для векселей и облигаций), которые получены с помощью функции вертикального поиска в диапазоне B5:D7, где заданы метки активов и стандартные отклонения.

Второй подход к вычислению риска портфеля и доходности — создание определенных пользователем функций в VBA. Если векторы ожидаемой доходности и веса портфеля обозначены переменными `retvec` и `wtsvec`, а дисперсионно-ковариационная матрица — `vcvmat`, то для вычисления данных показателей можно создать функции `PortfolioReturn(retvec,wtsvec)` и `PortfolioVariance(wtsvec,vcvmat)`. Риск портфеля — это квадратный корень из значения, которое возвращает функция `PortfolioVariance`. Подробнее процесс программирования этих функций представлен далее в главе. Если вы не знакомы с матричными функциями, то определенные пользователем функции значительно облегчат процесс ввода формул в ячейки.

При разработке портфельной теории на основании критерия "средняя доходность–дисперсия" в разделах 6.2–6.5 использованы три актива, но модель можно легко расширить и включить в нее большее количество возможных активов.

6.2 Параметр "риск–доходность"

Материал этой главы базируется на такой важной теме, как соотношение риска и доходности. На рис. 6.2 показано представление портфелей в системе координат "риск–доходность" (риск отображен на оси x, а доходность — на оси y). График отображает позицию трех классов активов и портфелей, основанных на этих активах. Например, самый высокорисковый класс активов, к которому относятся акции, занимает правую верхнюю позицию (риск равен 20,8%, доходность — 9,0%), а казначейские векселя расположены ближе к началу координат (риск равен 4,3%, доходность — 0,6%).

Текущий портфель (см. рис. 6.1), который состоит в основном из казначейских векселей и облигаций и меньшей доли акций, показан на рис. 6.2. Хотя этот отдельный портфель имеет ожидаемую доходность 2,2%, небольшое изменение пропорций инвестирования позволит получить портфель с минимальным риском и той же ожидаемой доходностью. Портфели с минимальным риском называются также эффективными, а их геометрическое место точек (кривая, образованная из точек этих портфелей) — эффективным множеством или эффективной границей. Таким образом, портфели с наилучшей комбинацией весов лежат на эффективной границе, где целевая доходность достигается с минимальным уровнем риска. На графике такие эффективные портфели отмечены как “эффективное множество без ограничений”. Обратите внимание, что эффективная граница содержит одну точку с минимальной дисперсией, отсюда и единственность портфеля с минимальной дисперсией. В данный момент веса портфеля должны составлять в сумме 1 и не ограничены никакими условиями, поэтому используется термин “без ограничений”.

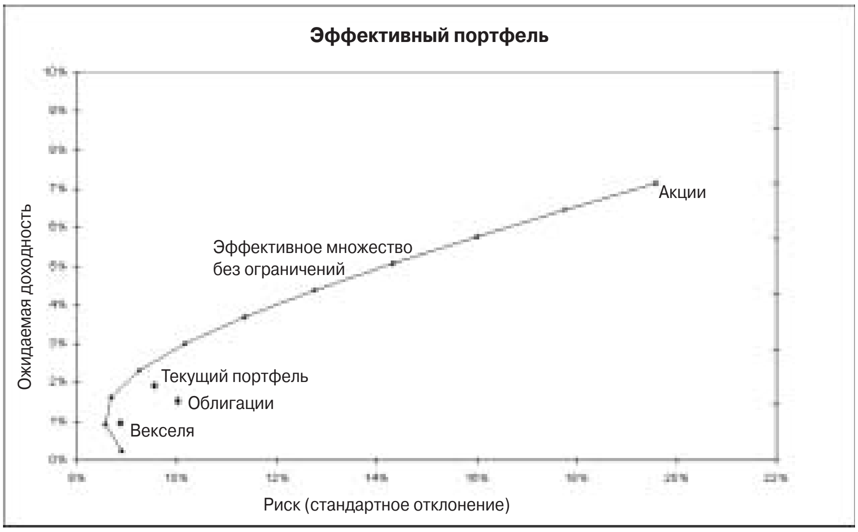


Рис. 6.2. Представление портфелей в координатах “риск–доходность”

В следующих разделах сначала определяются отдельные точки эффективного множества, а затем рассматривается получение всего эффективного множества. Кроме того, описывается случай с ограничениями на доли отдельных активов в портфеле (которые, в свою очередь, накладывают ограничение на диапазон доходности портфеля) и определяются точки эффективного множества с ограничениями. Стоит отметить, что хотя масштаб графика и не позволяет увидеть это, но точки эффективного множества с ограничениями всегда будут находиться на кривой, представляющей эффективную границу без ограничений, или немного правее.

Если на доли отдельных активов в портфеле не накладываются другие ограничения, то эффективные портфели можно получить из выведенных Хуангом и Литценбергером [2] формул, которые рассматриваются в разделе 6.4. Однако поиск эффективных портфелей с помощью надстройки Поиск решения (Solver) понять легче, поэтому данный подход описан первым, а затем модель расширяется, включая возможность наложения ограничений на веса отдельных классов активов.

6.3 Использование надстройки Поиск решения для поиска эффективных точек

Рассмотрим набор данных, представленный на рис. 6.3, и предположим, что нужно получить эффективный портфель с доходностью 7%. Задача состоит в том, чтобы найти такую комбинацию весов активов в портфеле, которая бы достигала целевого уровня доходности и минимизировала дисперсию доходности. Это стандартная оптимизационная задача, к которой можно применить надстройку Поиск решения (Solver), содержащую ряд итеративных оптимизационных методов. Так как дисперсия портфеля представляет собой квадратичную функцию относительно весов, надстройка Поиск решения будет использована для квадратичного программирования.

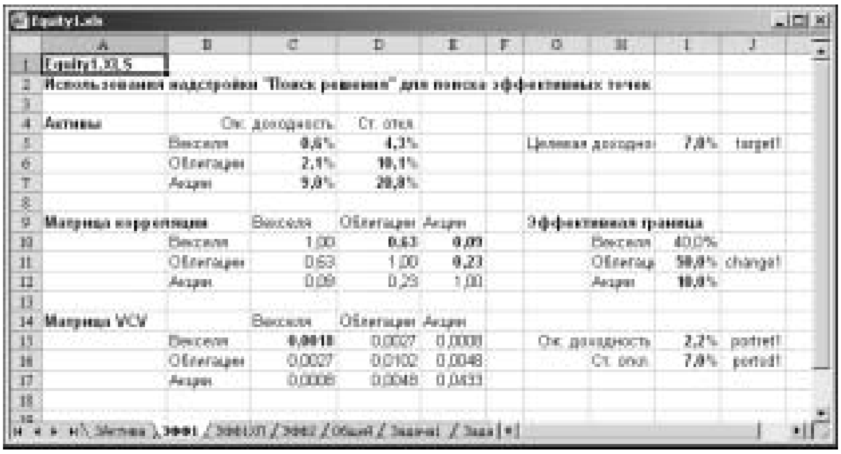


Рис. 6.3. Лист ЭФФ1 в книге `Equity1.xls` с данными для оптимизации

Математический вид задач, которые решаются методами квадратичного программирования, а также использование надстройки Поиск решения, подробно рассматриваются в [2]. Поэтому здесь ограничимся кратким описанием надстройки Поиск решения для данной задачи портфельной оптимизации, используя шаблон, приведенный на рис. 6.3. Обратите внимание на различные имена диапазонов, присвоенные ячейкам, например `change1` для ячеек I11:I12, `portret1` для I15 и т.д.

В окне Поиск решения требуется ввести изменяемые ячейки, целевую ячейку и задать ограничения (в данном примере — возможные значения изменяемых ячеек). Условие полного инвестирования можно задать с помощью формулы в ячейке I10: `=1-СУММ(I11:I12)`.

Таким образом, изменяемыми для оптимизации ячейками являются I11:I12 или (используя имя диапазона) `change1`. Целевая ячейка, значение которой минимизируется (I16), — это стандартное отклонение доходности `portsd1`. Есть также одно явное ограничение: ожидаемая доходность `portret1` (ячейка I15) должна быть, как минимум, равна целевому уровню `target1` (ячейка I5). (Имена диапазонов особенно полезны при установке параметров для надстройки Поиск решения, а также для дальнейшего создания макросов VBA, автоматизирующих оптимизацию.)

Для решения оптимизационной задачи с помощью надстройки Поиск решения выполните ряд действий.

1. Запустите надстройку Поиск решения, выбрав команду Сервис⇨Поиск решения (Tools⇨Solver).
2. В диалоговом окне Поиск решения (Solver Parameter) задайте целевую ячейку (I16), значение которой должно быть оптимизировано, установите ячейку равной максимальному или минимальному значению (рис. 6.4) и задайте изменяемые ячейки (I11:I12).
3. Щелкните на кнопке Добавить (Add), чтобы ввести ограничения, затем щелкните на кнопке OK (рис. 6.4). Согласно этому ограничению ячейка I15 будет равна целевому уровню (ячейка I5).
4. Щелкните на кнопке Параметры (Options) и убедитесь, что не выбран параметр Линейная модель (Assume Linear Model).
5. Щелкните на кнопке Выполнить (Solve), результаты поиска решения отобразятся в рабочем листе.

Результаты показывают, что получены следующие оптимальные веса: положительные доли в портфеле для облигаций и акций и отрицательная доля для казначейских векселей (пропорции портфеля показаны на рис. 6.5). Ячейка I15 подтверждает, что эффективный портфель с минимальным стандартным отклонением 15,7% достигает необходимой доходности в 7%. Изменение целевого уровня доходности в ячейке I5 и повторный запуск надстройки Поиск решения с теми же условиями дает другой эффективный портфель. (Убедитесь в этом, изменив целевую доходность в ячейке I5 с 7% на 3% и повторно запустив надстройку Поиск решения для получения новых весов. Выполните другое упражнение: найдите веса для портфеля с минимальной дисперсией. Если удалить ограничение `portret1=target1`, показанное на рис. 6.4, то надстройка Поиск решения вычисляет пропорции инвестирования для такого портфеля с доходностью 0,7% и риском 4,1%.)

Поскольку на веса отдельных активов в портфеле не накладывается никаких ограничений, возможны отрицательные доли активов в портфеле, что получается за счет “коротких” продаж. Действительно, для нашего примера (см. рис. 6.5) эффективный портфель с ожидаемой доходностью 7% содержит отрицательную долю –5,6% для казначейских векселей. Это означает, что необходимо взять в долг сумму денег, соответствующую доле казначейских векселей, и вложить их в два других актива; при этом ожидаемая доходность этих двух активов уменьшается на величину процента, подлежащего выплате за долг.

До сих пор оптимальные портфельные веса были получены путем минимизации риска портфеля. Альтернативный подход — определить веса из максимизации ожидаемой доходности для заданного уровня риска. Хотя для надстройки Поиск решения это разные задачи, оптимальные веса, полученные путем максимизации доходности, лежат на эффективной кривой для задачи с минимизацией целевой функции.

Рис. 6.4. Использование надстройки Поиск решения для минимизации дисперсии

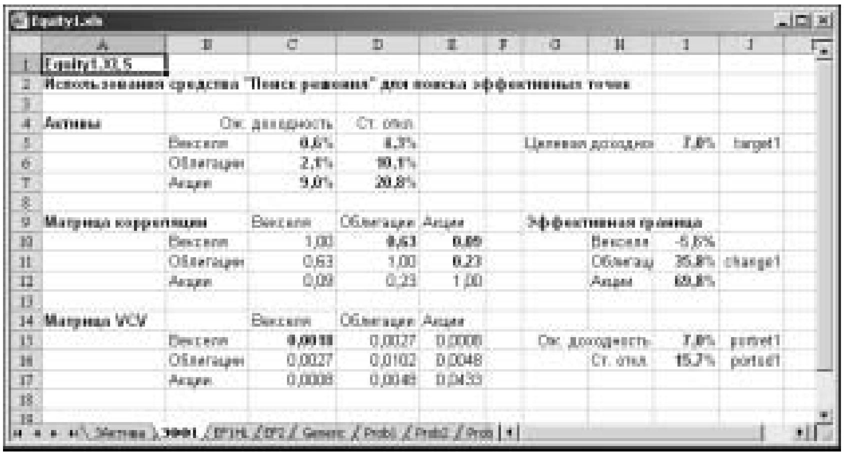


Рис. 6.5. Эффективный портфель с 7%-ной ожидаемой доходностью без ограничений

6.4 Получение эффективной границы (подход Хуанга и Литценбергера)

Если в оптимизационной задаче нет ограничений на веса активов (т.е. нет запрета на короткие продажи), то эффективное множество можно получить математическим способом. В некоторых более сложных учебниках (например, [3]) показано итеративное решение системы одновременных уравнений для задачи поиска эффективного портфеля, но существует более простой подход. Хуанг и Литценбергер описали, как найти две точки эффективного множества и затем получить из этих точек все эффективное множество (применив результат, выведенный Блэком). В этом разделе такой математический подход взят за основу и последовательность вычислений показана в матричном виде, чтобы вывести общее решение для портфеля с любым количеством активов (не обязательно равным 3). Данный раздел посвящен реализации этого подхода в Excel с помощью матричных функций. Поскольку это довольно сложная тема, вы можете отложить ее изучение до тех пор, пока не разберетесь в материале остальных разделов.

В листе ЭФФ1ХЛ (рис. 6.6) заданы именованные диапазоны, облегчающие восприятие формул в ячейках. Вектор ожидаемых доходностей (ячейки C5:C7) назовем $\mathbf{e}$, вектор весов (I5:I7) — $\mathbf{w}$, а единичный вектор (диапазон A24:A26) — $\mathbf{u}$. Ковариационную матрицу в диапазоне C15:E17 назовем $\mathbf{V}$. Как отмечалось выше в главе, дисперсия портфеля (I11) в матричной форме вычисляется как $\mathbf{w}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}\mathbf{w}$ с помощью функций операций с матрицами Excel.

В методе Хуанга и Литценбергера для поиска эффективных портфелей требуется вычислить матрицу $\mathbf{V}^{-1}$, обратную ковариационной матрице. Для этого

Рис. 6.6. Прямое аналитическое решение Хуанга и Литценбергера

используется функция Excel `МОБР()` (`MINVERSE()`). В диапазон ячеек 3×3 (H15:J17) необходимо ввести следующую формулу массива: `=МОБР(C15:E17)`.

Не забудьте, что ввод формулы с функциями массива (после выделения диапазона ячеек для формулы) заканчивается комбинацией клавиш <Ctrl+Shift+Enter>. Если после ввода формулы в ячейке не отображаются фигурные скобки формулы массива $\{\}$, нажмите клавишу <F2> и повторите ввод снова.

Чтобы найти два эффективных портфеля (обозначим их $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}+\mathbf{h}$), Хуанг и Литценбергер вычисляют четыре скалярные величины (A, B, C и D). Первые три являются произведениями векторов и матриц, а четвертая зависит от трех предыдущих:

$$A = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{e}; \quad B = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{e}; \quad C = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{u}; \quad D = BC - A^2.$$

Если определить два промежуточных вектора-столбца $\mathbf{l} = \mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{e}$ и $\mathbf{m} = \mathbf{V}^{-\mathbf{1}}\mathbf{u}$, которые показаны в ячейках C24:C26 и D24:D26, то матричные выражения сводятся к такому виду:

$$A = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{l}; \quad B = \mathbf{e}^{\mathbf{T}}\mathbf{l}; \quad C = \mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{m}.$$

Формула для A в ячейке G23 =МУМНОЖ(ТРАНСП(**u**);**l**) (=MMULT(TRANSPOSE(**u**),**l**)) включает функцию массива МУМНОЖ() (MMULT()), поэтому ее нужно вводить как формулу массива (как и формулы для B и C). Поскольку величины A, B, C и D скалярные, для ввода формулы не требуется больше одной ячейки.

Ниже приведены формулы для вычисления весов активов, представляющие две точки на кривой эффективного множества — портфель $\mathbf{g}$ (с ожидаемой доходностью 0%) и портфель $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ (с ожидаемой доходностью 100%):

$$\mathbf{g} = \frac{Bm - Al}{D}; \quad \mathbf{h} = \frac{Cl - Am}{D}.$$

Прежде чем вводить формулы для $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$, необходимо выделить вектор ячеек размером 3×1, так как это формулы массива. Веса для двух полученных эффективных портфелей показаны в ячейках I24:I26 и K24:K26 (см. рис. 6.6).

Таким образом, $\mathbf{g}$ с весами 124, –20,5 и –3,5% — для казначейских векселей, облигаций и акций соответственно — возвращает портфель на эффективной границе с нулевой ожидаемой доходностью. Аналогично: веса вектора $\mathbf{g}+\mathbf{h}$ возвращают второй эффективный портфель с ожидаемой доходностью 100%. Для получения весов эффективного портфеля с любой заданной ожидаемой доходностью T можно использовать линейную комбинацию $\mathbf{g}+\mathbf{h}{*}T$ известных векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$. Например, ожидаемой доходности 7% (строки 33–38 на рис. 6.6) можно достичь в портфеле, содержащем –5,6% казначейских векселей, 35,8% облигаций и 69,8% акций (ячейки D36:D38). Таким образом, портфель с минимальным риском для ожидаемой доходности 7% состоит из комбинации облигаций и акций с короткой продажей казначейских векселей. Такой результат, полученный по методу Хуанга и Литценбергера, идентичен результату, показанному на рис. 6.5 для оптимизации с помощью надстройки Поиск решения (Solver) без ограничений на веса.

Другие точки эффективного множества можно получить с помощью выражения $\mathbf{g}+\mathbf{h}{*}T$, задавая различные уровни ожидаемой доходности T. Таким образом можно получить все эффективное множество. Например, в Excel как основу для графика XY можно использовать таблицу данных с диапазонами ожидаемой доходности от 0 до 10% в качестве входных данных, а также риском и доходностью в качестве результатов. На рис. 6.2 точки с меткой “эффективное множество” получены из такой таблицы данных.

Очевидно, что операции, необходимые для вычисления весов в двух эффективных портфелях, для выполнения в электронных таблицах достаточно сложны.

Это идеальная ситуация для применения определенной пользователем функции, упрощающей ввод формул. В разделе 6.10 рассмотрена программа, реализующая подход Хуанга и Литценбергера. Функция `HLPortfolioWeights()` имеет четыре аргумента: *expert*, *retvec*, *vcvmat* и *rf*. Аргумент *expert* — это ожидаемая доходность эффективного портфеля, для которого необходимо вычислить веса, *retvec* — вектор ожидаемых доходностей, *vcvmat* — ковариационная матрица, а *rf* — безрисковая ставка доходности (здесь равная –1). Функция возвращает массив соответствующих пропорций инвестирования. На рис. 6.6 в ячейках E36:E38 показаны веса, полученные с помощью этой функции, а также веса, полученные из формул в рабочем листе.

6.5 Эффективные портфели с ограничениями

Если на доли активов в портфеле наложены какие-либо ограничения (например, неотрицательность весов), то аналитическое решение из предыдущего раздела применить нельзя. Однако с помощью средства Поиск решения можно вычислить оптимальные веса в условиях ограничений. Чтобы отличать эти результаты от предыдущего случая, будем называть полученный портфель эффективным портфелем с ограничениями. В первом фрагменте листа Excel ЭФФ2 (рис. 6.7) возможные веса портфеля находятся в диапазоне ячеек H8:J8 (с именем `portwts2`), минимальные веса — в строке ниже, а максимальные — в строке выше (им присвоены имена `portmin2` и `portmax2` соответственно). Эти ограничения могут быть включены в задачу, поставленную надстройке Поиск решения (рис. 6.8).

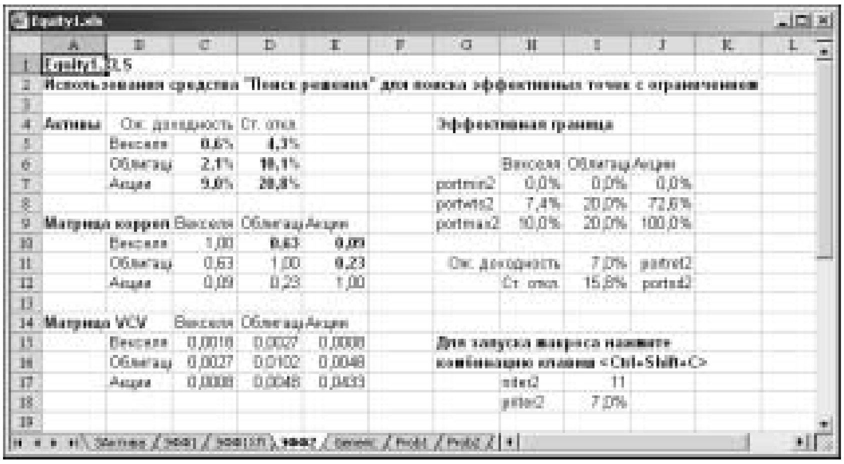


Рис. 6.7. Оптимизация с возможными ограничениями на веса портфеля, лист ЭФФ2

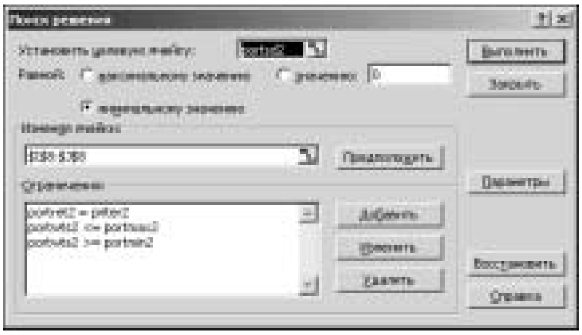


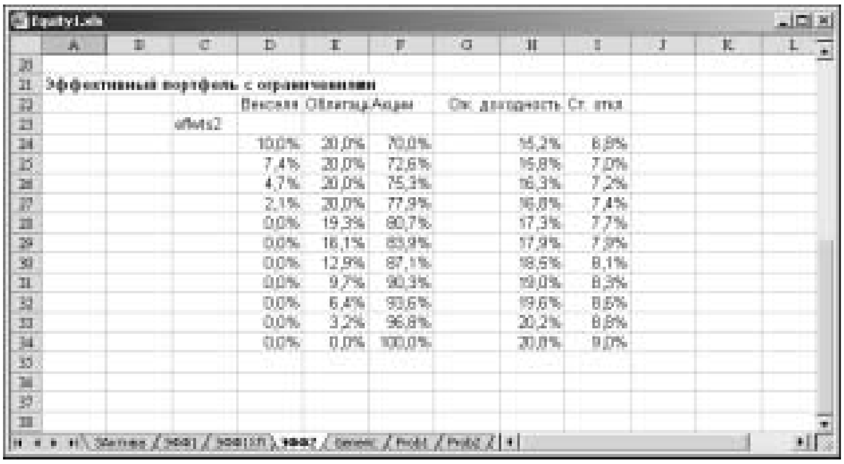
Рис. 6.8. Параметры надстройки Поиск решения с ограничениями на значения весов

Эффективный портфель, найденный с помощью надстройки Поиск решения, имеет такие веса: 7,4% инвестируются в казначейские векселя, 20,0% — в облигации, 72,6% — в акции. Эффективный портфель с ожидаемой доходностью 7%, но имеющий запрет на короткие продажи, максимальное значение доли инвестиций в казначейские векселя 10%, в облигации — 20%, имеет стандартное отклонение 15,8%. Это сравнимо только со стандартным отклонением 15,7% в портфеле без ограничений; таким образом, добавление в модель ограничений дает решение, уступающее по эффективности модели без ограничений.

Еще раз запуская надстройку Поиск решения для различных целевых ожидаемых доходностей, можно получить ряд точек на эффективной границе с ограничениями (рис. 6.9). Механизм работы макроса описан в разделе 6.12. С учетом указанных выше ограничений минимальная и максимальная ожидаемые доходности портфеля равны соответственно 6,8 и 9,0%. (Проверьте эти ответы самостоятельно, применив надстройку Поиск решения для получения весов, минимизирующих и максимизирующих ожидаемую доходность.) Если выполнить 11 оптимизаций, то данный диапазон доходности разбивается на 11 целевых доходностей, а надстройка Поиск решения используется 11 раз для поиска эффективных портфелей, доходности которых лежат в соответствующем диапазоне (между 6,8 и 9,0%).

Последний портфель (см. рис. 6.9) эквивалентен инвестированию только в акции.

Подводя итог сказанному, следует отметить, что наиболее общим приемом для определения весов высокорисковых портфелей является применение оптимизации с использованием надстройки Поиск решения. Однако при отсутствии ограничений на значения весов (кроме одного: их сумма равна единице) формулы для подсчета оптимальных весов можно получить с помощью аналитического метода Хуанга и Литценбергера, который может быть реализован посредством специальных функций (раздел 6.4).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
21	Эффективный портфель с ограничениями								
22				Векселя	Облигац	Акции		Ож. доходность	Ст. откл
23			wNets2						
24				10,0%	20,0%	70,0%		15,2%	6,8%
25				7,4%	20,0%	72,6%		15,8%	7,0%
26				4,7%	20,0%	75,3%		16,3%	7,2%
27				2,1%	20,0%	77,9%		16,8%	7,4%
28				0,0%	19,3%	80,7%		17,3%	7,7%
29				0,0%	16,1%	83,9%		17,9%	7,9%
30				0,0%	12,9%	87,1%		18,5%	8,1%
31				0,0%	9,7%	90,3%		19,0%	8,3%
32				0,0%	6,4%	93,6%		19,6%	8,6%
33				0,0%	3,2%	96,8%		20,2%	8,8%
34				0,0%	0,0%	100,0%		20,8%	9,0%

Рис. 6.9. Веса для эффективных портфелей с ограничениями

6.6 Комбинация безрисковых и высокорисковых активов

Данный раздел, наряду с разделами 6.7–6.9, содержит дополнительный материал, имеющий отношение к задаче выбора портфелей из высокорисковых активов. Тем не менее этот материал в основном теоретический и его можно рассматривать как приложение к основному тексту главы. Здесь обсуждается разработка формул для решения так называемых трех общих задач портфельного инвестирования [5] и определенных пользователем функций. Данные функции предоставляют решения для поддержки методов из глав 7, “Оценка акций”, и 8, “Оценка эффективности инвестиционных стратегий”.

Чтобы переход к обсуждению в следующей главе ценовой модели рынка капитала был “плавным” и логичным, необходимо рассмотреть концепцию безрискового актива. После рассмотрения портфелей с тремя (или больше) высокорисковыми активами и иллюстрации выбора эффективных комбинаций, которые дают указанную целевую доходность с минимальным риском, можно коротко проанализировать, как должны соотноситься между собой риск и доходность инвестиций. Этот компромисс между доходностью и риском является главным фактором, влияющим на распределение инвестируемых средств между портфелем высокорисковых активов и безрисковым активом. В контексте трех общих задач выбора портфеля рассматриваются следующие идеи:

- комбинация безрискового актива с высокорисковым активом;
- комбинация двух высокорисковых активов;
- комбинация безрискового актива с высокорисковым портфелем.

Подходы, применяемые для решения этих задач в электронных таблицах, представлены в рабочем листе `Общий`.

Способ измерения индивидуальных предпочтений относительно риска и доходности и необходимую для этого концепцию функции полезности можно заимствовать из общей экономической теории. Предположим, что функция полезности индивида имеет следующий вид:

$$U = E(r_p) - 0{,}5A\sigma_p^2.$$

Чем выше величина коэффициента несклонности к риску A для инвестора, тем выше "штраф" портфельного риска, который вычитается из ожидаемой доходности портфеля. На практике, согласно исследованиям, A находится в пределах от 2 до 4, поэтому в наших примерах будет использовано значение $A = 3$.

Так как последующие выкладки осуществляются для двух активов, перепишем формулы для вычисления доходности и риска портфеля, приведенные в разделе 6.1, для двух активов.

Доходность портфеля: $E(r_p) = w_1E(r_1) + w_2E(r_2)$.

Дисперсия портфеля: $\mathrm{Var}(r_p) = \sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\mathrm{cov}(1{,}2)$.

Ковариация двух активов $\mathrm{cov}(1{,}2)$ может быть также выражена через корреляцию: $\mathrm{cov}(1{,}2) = \mathrm{cor}(1{,}2)\sigma_1\sigma_2$.

Обозначим доходность безрискового актива как r_f. Дисперсия безрискового актива равна нулю, и ковариации с высокорисковыми активами нулевые. Риск портфеля равен квадратному корню из дисперсии.

6.7 Задача 1. Комбинация безрискового актива с высокорисковым

Первая из наших общих задач выбора портфеля включает подбор комбинации одного безрискового актива (`asset0`) и одного высокорискового (`asset1`), доходности которых считаются некоррелированными. Данные приведены на рис. 6.10: безрисковая ставка доходности равна 1%, а актив `asset1` имеет риск и доходность, похожие на показатели облигаций из рассмотренного ранее портфеля. Изменяя долю инвестирования в `asset1` (ячейка H14) в диапазоне от 0 до 100%, можно получить прямую линию, соединяющую точку "риск–доходность" для безрискового актива `asset0` и соответствующую точку для `asset1`. Эта линия показана на рис. 6.11.

Индивидуальные инвесторы будут выбирать конкретную точку на данной прямой в зависимости от значения их коэффициента несклонности к риску (ячейка K6). На рис. 6.11 показана кривая полезности (в виде дискретных точек, зна-

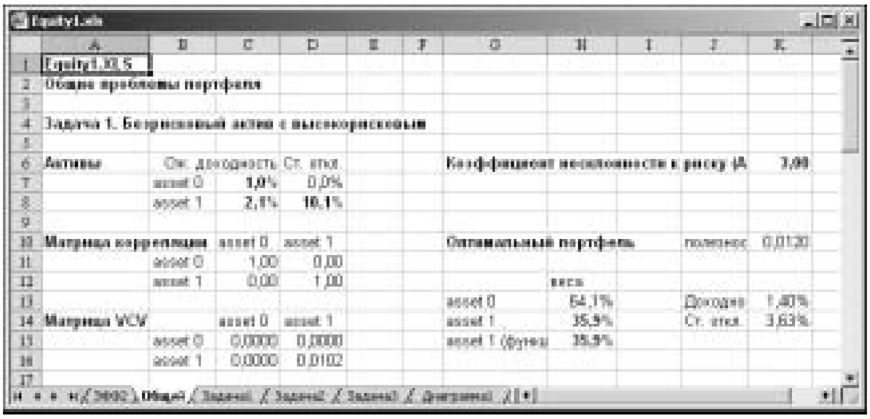


Рис. 6.10. Вычисления в электронных таблицах для задачи 1, лист Общий

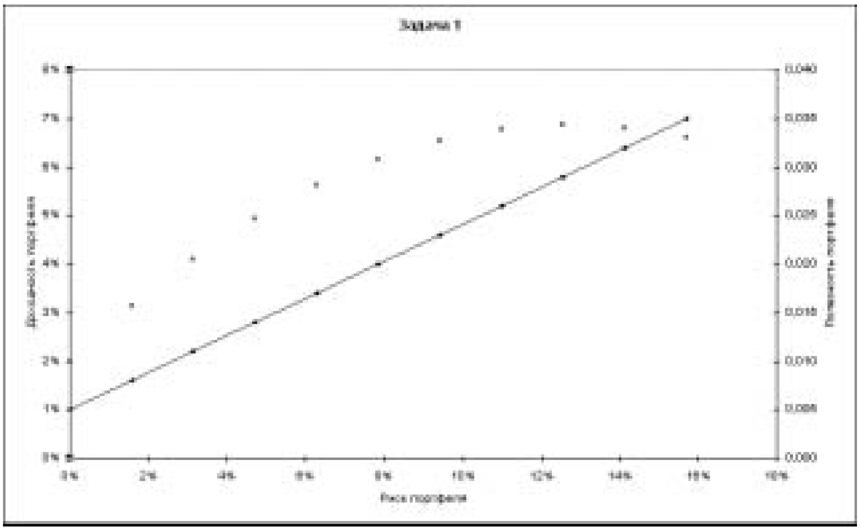


Рис. 6.11. Зависимость полезности и дохода от риска для задачи 1

чения которых отображены на правой оси) для портфелей с различными пропорциями asset1 при коэффициенте несклонности к риску 3 (в виде отдельных точек, значения которых отображены на правой вертикальной оси графика). Полезность начинается со значения 0,01 (когда все 100% инвестируются в asset0) и постепенно увеличивается по мере увеличения доли asset1 до достижения оптимальной точки, после чего начинает убывать до значения 0,006 (когда 100% инвестируются в asset1).

Оптимальная точка на прямой соответствует точке максимальной полезности, которую можно получить, находя долю `asset1` (ячейка `H14`) из следующего соотношения:

$$w_1^* = \frac{E(r_1) - r_f}{A\sigma_1^2}.$$

Для данного примера в оптимальном портфеле 35,9% средств инвестируется в высокорисковый актив, что дает значение полезности 0,012 (т.е. эквивалент гарантированной доходности в 1,2%). Для вычисления значения доли высокорискового актива (ячейка H15) была разработана функция `Prob1OptimalRiskyWeight` (раздел 6.11).

Обратите также внимание, что оптимальная доля средств, вложенных в высокорисковый актив (а не в актив `asset0`), зависит от степени несклонности к риску конкретного инвестора. Инвестор с более высоким коэффициентом несклонности к риску (например, 4) уменьшит долю высокорисковых активов в своем портфеле до 27%.

6.8 Задача 2. Комбинация двух высокорисковых активов

Рассмотрим проблемы комбинации двух высокорисковых активов. В нашем примере их доходности слабо положительно скоррелированы, как облигации и акции в предыдущем примере портфеля из трех активов. Данные для задачи 2 представлены на рис. 6.12, где в ячейке D25 задана корреляция 0,23.

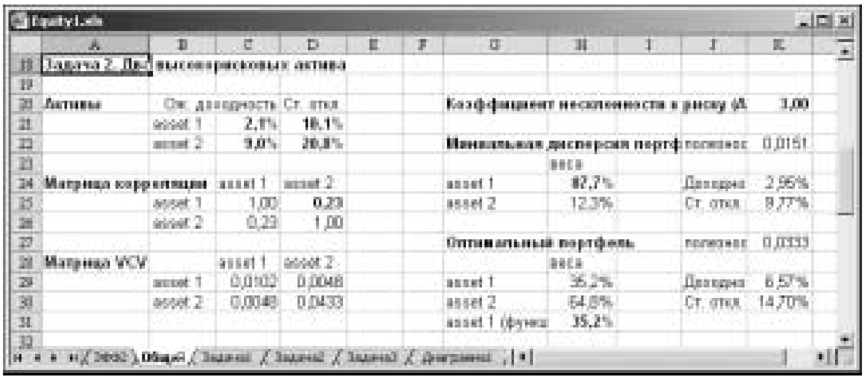


Рис. 6.12. Вычисления в электронных таблицах для задачи 2, лист `Общий`

Изменяя долю инвестиций, вложенных в `asset1`, можно получить эффективную границу допустимой области (сплошная линия на рис. 6.13). Полученная в результате кривая, соединяющая точки "риск–доходность" для комбинации двух высокорисковых активов, показывает преимущества диверсификации. Например, если инвестор начинает с портфеля, полностью состоящего из `asset1`, то может увеличить доходность портфеля, вложив часть средств в `asset2`. При этом также уменьшится общий риск портфеля, несмотря на то что актив `asset2` сам по себе обладает бóльшим риском, чем `asset1`.

Процесс распределения средств между активами `asset1` и `asset2` ведет к уменьшению риска, пока не будет достигнута точка портфеля с минимальной дисперсией (где 87,7% средств вложено в `asset1`), стандартное отклонение которого равно 9,77%. Показатели для портфеля с минимальной дисперсией не зависят от коэффициента несклонности к риску и могут рассматриваться как веса портфеля для инвестора с полной несклонностью к риску.

Значение доли первого актива (w_1) в портфеле с минимальной дисперсией равно

$$\frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}.$$

Для удобства обозначим долю первого актива в портфеле с минимальной дисперсией через w_1^{mv} (87,7%, как показано в ячейке H24), тогда доля второго актива равна $(1 - w_1^{mv})$. Таким образом, если 87,7% портфеля вложено в `asset1`, то данная комбинация характеризуется минимальным риском (9,77%). Обратите внимание, что это меньше, чем риск каждого из активов в отдельности.

Инвесторы, которые стремятся к большему риску, будут уменьшать долю, вложенную в `asset1`, и увеличивать долю актива `asset2`. На рис. 6.13 для инвестора с коэффициентом несклонности к риску, равным 3, показана функция полезности (в виде дискретных точек со значениями, отображенными на правой оси), которая возрастает до достижения риска приблизительно 15%. Инвестор будет готов взять на себя больший риск, пока доля первого актива не уменьшится до 35,2% (стандартное отклонение портфеля в этой точке равно 14,7%).

Можно вывести значение оптимальной доли первого актива в высокорисковом портфеле:

$$w_1^{opt} = w_1^{mv} + \frac{E(r_1) - E(r_2)}{A(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2)}.$$

Эта доля (ячейка H29) соответствует оптимальному портфелю с риском. Формула для оптимальной доли в портфеле состоит из двух слагаемых: доля для портфеля с минимальной дисперсией плюс второе слагаемое (оно зависит от коэффициента несклонности к риску и может быть рассмотрено как спекулятивный спрос инвестора. Оптимальный высокорисковый портфель имеет значение полезности 0,033 (соответствующее эквивалентному гарантированному доходу в 3,3%).

И вновь долю инвестиций в оптимальном портфеле легче всего вычислить через определенную пользователем функцию. Эти вычисления реализованы в виде функции `Prob2OptimalRiskyWeight()`, которая описана в разделе 6.11.

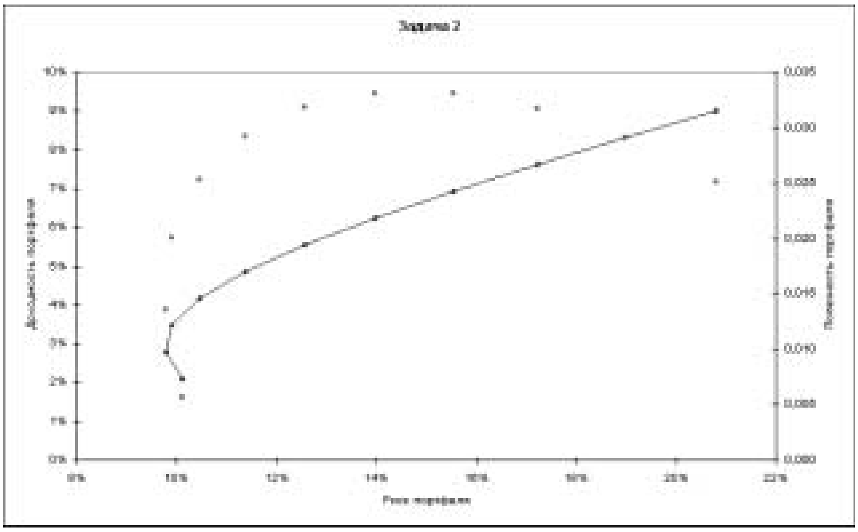


Рис. 6.13. Зависимость полезности и доходности от риска для задачи 2

6.9 Задача 3. Комбинация безрискового актива и высокорискового портфеля

Последняя общая задача рассматривает комбинацию высокорискового портфеля с безрисковым активом. Эта задача решается в два этапа. На первом этапе необходимо найти оптимальную комбинацию высокорисковых активов (частный случай задачи 2), на втором — соотношение между безрисковым активом и высокорисковым портфелем (что, по существу, представляет собой задачу 1). Данные для вычислений приведены на рис. 6.14.

Сначала, игнорируя наличие безрискового актива, необходимо найти оптимальное соотношение между двумя высокорисковыми активами в портфеле. В предыдущем разделе было найдено приблизительное решение 35%:65%. Предположим, что оптимальный портфель с риском R имеет ожидаемую доходность $E(r_R)$ и стандартное отклонение σ_R, а доля первого актива в портфеле равна F_1. Необходимо выбрать значение F_1, максимизирующее отношение “доходность–риск” для данного портфеля R с учетом включения безрискового актива на втором этапе задачи, т.е. максимизировать значение

$$\frac{E(r_R) - r_f}{\sigma_R}.$$

Применив некоторые алгебраические выкладки (или графический метод, как в [1]), можно показать, что угол наклона прямой, соединяющей портфели на

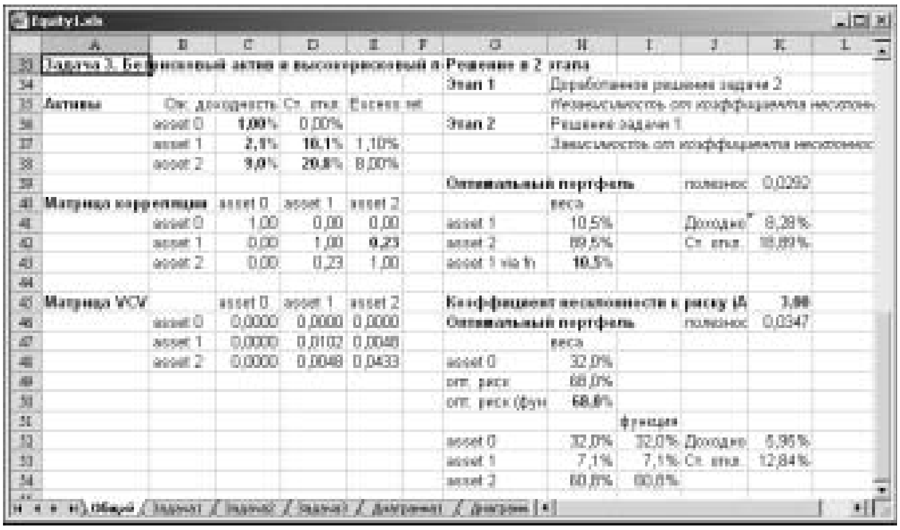


Рис. 6.14. Вычисления в электронных таблицах для задачи 3, лист `Общий`

эффективной границе с безрисковым активом, наибольший, когда эта прямая является касательной к эффективной границе. Для весов в точке касания ожидаемая доходность равна доходности сверх нормы (т.е. превышению доходности над безрисковой ставкой): $E(R_1) = E(r_1) - r_f$ и $E(R_2) = E(r_2) - r_f$. В результате будет получена следующая формула для оптимальных пропорций инвестирования:

$$F_1^{opt} = \frac{\sigma_2^2 E(R_1) + \mathrm{cov}(1{,}2)E(R_2)}{\sigma_2^2 E(R_1) + \sigma_1^2 E(R_2) - \mathrm{cov}(1{,}2)(E(R_1) + E(R_2))},$$

где $E(R_1)$ и $E(R_2)$ — ожидаемые доходности сверх нормы r_f.

Обратите внимание, что веса оптимального портфеля не зависят от коэффициента несклонности к риску, но зависят от значения безрисковой ставки доходности.

Используя данную формулу в ячейке H41, получим, что 10,5% средств высокорискового портфеля вложено в актив `asset1`, а 89,5% — в `asset2`.

На втором этапе решения задачи оптимальный портфель из двух высокорисковых активов, полученный на первом этапе, комбинируется с безрисковым активом для достижения максимальной полезности. Следовательно, доля высокорискового портфеля вычисляется как

$$\frac{E(r_R) - r_f}{A\sigma_R^2},$$

а оставшаяся часть инвестируется в безрисковый актив. Данные веса уже зависят от коэффициента несклонности к риску.

В результате получен оптимальный портфель, где 68,0% принадлежит высокорисковому портфелю и 32% вложено в безрисковый актив. Полезность при этом увеличилась с 0,0292 на первом этапе до 0,0347. (Оптимальное соотношение высокорисковых активов можно также получить с помощью функции `Prob1OptimalRiskyWeight()`, как в ячейке H50.)

Распределяя 68% инвестиций в первоначальные активы, мы получаем доли активов в ячейках H52:H54. Определенная пользователем функция `Prob3OptimalWeightsVec()`, вычисляющая вектор весов для окончательного оптимального портфеля, описана в разделе 6.11 (ячейки I52:I54).

На графике, приведенном на рис. 6.15, кривая эффективного множества представляет все возможные комбинации активов `asset1` и `asset2`. Учитывая наличие безрискового актива, можно отметить, что существует единственный оптимальный портфель: ему соответствует точка, где прямая, соединяющая безрисковый актив с эффективной границей для высокорискового портфеля, является касательной к кривой эффективной границы. (Такую точку касания на эффективной границе дает "скорректированная" задача 2.) Касательная к эффективной границе начинается со 100% инвестиций в безрисковый актив, затем доля падает до 0% (точка касания) и заканчивается долей 150% в высокорисковом портфеле и отрицательной долей –50% в безрисковом активе. (В данной задаче, как вы помните, не рассматриваются ограничения на долю безрискового актива в портфеле.) Второй этап задачи (и решение задачи 3) связан с вычислением точки на касательной, которая будет выбрана как оптимальный портфель инвестора. Полезность на графике изображена в виде ряда точек. Максимальное значение полезности для нашего коэффициента несклонности к риску достигается при значении риска приблизительно 12,5%.

Таким образом, остается сделать лишь небольшой переход от задачи 3 к разработке модели CAPM, представленной в следующей главе, а именно перевести предпочтения индивидуальных инвесторов на уровень всего рынка, получив таким образом теорию оценки стоимости активов.

6.10 Определенные пользователем функции

Лист `Module1` содержит код для определенных пользователем функций, используемых в рабочей книге `Equity1.xls`. Эти функции иллюстрируют обработку массивов в определенных пользователем функциях — аргументы массивов, функции массива, вычисления со скалярными величинами и массивами, а также получение результатов в виде массива. Например, функция `PortfolioReturn()` задана так:

```
Function PortfolioReturn(retvec, wtsvec)
  If Application.Count(retvec) = Application.Count(wtsvec) Then
```

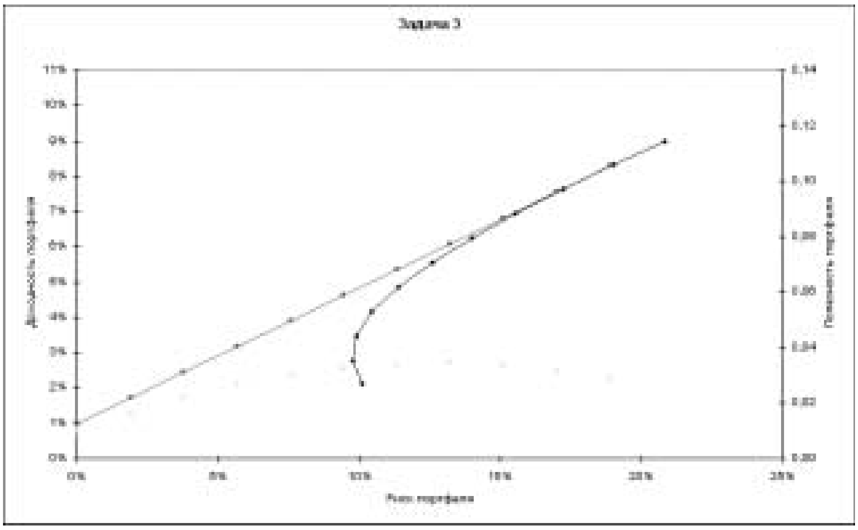


Рис. 6.15. Зависимость полезности и доходности от риска для задачи 3

```
    If retvec.Columns.Count <> wtsvec.Columns.Count Then
      wtsvec = Application.Transpose(wtsvec)
    End If
      PortfolioReturn = Application.SumProduct(retvec, wtsvec)
    Else
      PortfolioReturn = -1
  End If
End Function
```

Эта программа выполняет проверку размерности массивов, задействованных в вычислениях. Функция `SumProduct()` возвращает скалярную величину, но требует, чтобы два аргумента-массива имели одинаковую размерность. Это достигается путем проверки того, имеют ли массивы `retvec` и `wtsvec` одинаковое количество элементов. Затем, если количество столбцов в двух массивах разное, массив `wtsvec` транспонируется. Если массивы имеют разное количество элементов, функция возвращает значение ошибки –1. Необходимость проверять размерность вызвана также тем, что специальная функция может получать свои аргументы как в виде столбца, так и в виде строки.

Функция `HLPortfolioWeights()` (код которой также приведен в листе `Module1`) примечательна особенностями работы с функциями массивов. Прежде всего необходимо следить за размерностью массивов внутри функции. В VBA одномерные массивы хранятся в виде строк, поэтому и одномерные массивы, которые возвращают специальные функции, также будут векторами-строками. Последуем этому правилу и обеспечим, чтобы определенные пользователем функции возвращали в Excel одномерные массивы VBA в форме векторов-строк. Тем не менее внутри определенных пользователем функций лучше использовать другое правило, согласно которому векторы записаны в виде векторов-столбцов. Например, при необходимости переменные `uvec` и `retvec` транспонируются для преобразования в векторы-столбцы.

Необходимо также внимательно следить за промежуточными переменными, полученными из функций массивов.

```
Dim i As Variant
  l = Application.MMult(vinvmat, retvec)
  m = Application.MMult(vinvmat, uvec)
```

Поскольку переменные `l` и `m` сами являются массивами, полученными из функции массива, их нужно объявить как тип `Variant`, но, так как они будут использованы в качестве аргументов для функций массива, без заданной размерности. В функции `Mmult()` аргумент `vinvmat` — это матрица $[n, n]$, а `retvec` — вектор $[n, 1]$. Следовательно, массив, полученный как их произведение, будет вектором-столбцом $[n, 1]$.

Следующий момент, который необходимо учесть, касается вычисления четырех скалярных величин: a, b, c и d. Величина d вычисляется их трех других, каждая из которых получена из функции массива. Например, a вычисляется из массива единичного вектора `uvec` и массива 1.

```
a = Application.Sum(Application.MMult(Application.Trans-
pose(uvec), 1))
```

Функция `Mmult()` умножает вектор-строку $[1, n]$ на вектор-столбец $[n, 1]$ и возвращает массив $[1, 1]$ (скалярную величину). В Excel это не вызовет никаких трудностей, но в VBA необходимо использовать функцию `Sum()` для преобразования массива в скалярную величину.

Наконец, необходимо решить вопрос смешанной обработки вычислений, где задействованы как скалярные величины, так и элементы массивов. В Excel это также выполняется без проблем, как показано в ячейках I24:I26 для вектора **g**. Но в VBA такие вычисления лучше всего выполнить в цикле.

```
Dim wtsvec() As Variant
n = Application.Count(retvec)
ReDim wtsvec(n)
For i = 1 To n
  gi = b * m(i, 1)-a * l(i, 1)
  hi = c * l(i, 1)-a * m(i, 1)
  wtsvec(i) = (gi + hi * expert)/d
Next i
```

Поскольку вектор `wtsvec` вычисляется поэлементно, можно объявить его как `Variant`, но необходимо впоследствии изменить его размерность с помощью оператора ReDim. В цикле можно умножить скалярные величины на отдельные элементы массива.

6.11 Функции для трех общих задач портфельного инвестирования

Функция Prob1OptimalRiskyWeight() с четырьмя аргументами является прямой реализацией в программе VBA формулы, представленной в разделе 6.7. Аргументами функции являются доходность и риск (r1 и sig1) высокорискового актива, безрисковая ставка доходности (rf) и коэффициент несклонности к риску (rraval).

```
Function Prob1OptimalRiskyWeight(r1, rf, sig1, rraval)
  Prob1OptimalRiskyWeight = (r1-rf)/(rraval * sig1^2)
End Function
```

Ниже приведен код функции Prob2OptimalRiskyWeight(), которую можно использовать для решения задач 2 и 3. Она имеет всего семь аргументов: r1, r2, sig1 и sig2 — доходности и стандартные отклонения для двух высокорисковых активов; corr12 — корреляция между двумя высокорисковыми активами; rraval — коэффициент несклонности к риску для конкретного инвестора; rf — безрисковая ставка доходности. Для задачи 2 безрисковая ставка доходности задана равной нулю.

```
Function Prob2OptimalRiskyWeight(r1, r2, sig1, sig2, corr12,
rraval)
  Dim cov12, vqr1, var2,minvarw, w, xr1, xr2
  cov12 = corr12 * sig1 * sig2
  var1 = sig1^2
  var2 = sig2^2
  If rf <= 0 Then
    minvarw = (var2--cov12)/(var1 + var2-2*cov12)
    w = minvarw + (r1--r2)/(rraval*(var1 + var2-2*cov12))
  Else
    xr1 = r1--rf
    xr2 = r2--rf
    w = xr1*var2-xr2*cov12
    w = w /(xr1*var2 + xr2*var1-(xr1 + xr2)*cov12)
  End If
  Prob2OptimalRiskyWeight = w
End Function
```

Формула для оптимальной доли актива записана через ковариацию (обозначенную как cov12). Переменная minvarw — это оптимальная доля актива в портфеле с минимальной дисперсией w_1^{mv}, а переменная w — значение w_1^{opt}, максимизирующее полезность портфеля.

Для задачи 3 функция использует функции, решающие задачи 1 и 2. Функция Prob3OptimalWeightsVec() возвращает три оптимальные доли активов в виде вектора. Полный код функции приведен ниже.

```
Function Prob3OptimalWeightsVec(r1, r2, sig1, sig2, corr12,
rraval)
  Dim w0, w1, w2, rr, sigr
  w1 = Prob2OptimalRiskyWeight(r1, r2, rf, sig1, sig2, corr12, _
  rrava)
  w2 = 1-w1
  rr = w1*r1 + w2*r2
  sigr = Sqr((w1*sig1)^2 + (w2*sig2)^2 + 2*w1*w2*corr12*sig1* _
  sig2)
  w0 = 1-Prob1OptimalRiskyWeight(rr, rf, sigr, rraval)
  w1 = (1-w0)*w1
  w2 = (1-w0)*w2
  Prob3OptimalWeightsVec = Array(w0, w1, w2)
End Function
```

Без учета безрискового актива данная задача сводится к задаче 2 и вычисляет соотношение между активами asset1 и asset2:

```
w1 = Prob2OptimalRiskyWeight(r1, r2, rf, sig1, sig2, corr12, _
rrava)
w2 = 1-w1
```

Из этих весов можно вычислить доходность и риск высокорискового портфеля:

```
rr = w1*r1 + w2*r2
sigr = Sqr((w1*sig1)^2 + (w2*sig2)^2 + 2*w1*w2*corr12*sig1*sig2)
```

Эти величины являются аргументами для определения доли безрискового актива (по существу, это задача 1). Для этого используется функция Prob1OptimalRiskyWeight().

6.12 Дополнительные макросы

Макросы, используемые для получения эффективной границы с помощью надстройки Поиск решения (Solver), содержатся в листе модуля ModuleM. Надстройку Поиск решения необходимо установить дополнительно, если одноименная команда не отображается в меню Сервис (Tools). Кроме того, чтобы использовать функции надстройки Поиск решения в VBA, в листе модуля нужно указать ссылку на файл надстройки SOLVER.xla.

```
Sub EffFrontier1()
  SolverReset
```

```
  Call SolverAdd(Range("portret1"), 2, Range("target1"))
  Call SolverOk(Range("portsd1"), 2, 0, Range("change1"))
  Call SolverSolve(True)
  SolverFinish
End Sub
```

Макрос `EffFrontier1` содержит одно применение надстройки Поиск решения. Функция `SolverAdd()` добавляет одно необходимое ограничение (где значение 2 представляет ограничение равенства), затем функция `SolverOk()` задает параметры оптимизационной задачи (здесь значение 2 соответствует задаче поиска минимума). Функция `SolverSolve()` решает задачу (параметр `True` скрывает окно результатов), после чего функция `SolverFinish()` переносит окончательные результаты решения в рабочий лист.

Строго говоря, ключевое слово `Call` использовать необязательно, но мы будем включать его, когда в программе используется подпроцедура, требующая параметров. С применением такого синтаксиса параметры процедуры должны быть заданы в скобках.

Макрос `EffFrontier2` несколько сложнее, так как он вычисляет всю эффективную границу с помощью многократного повторения функции `Solver()` в цикле. Количество повторов в цикле задано заранее. Самое важное — свести к минимуму число операторов, которые содержатся в цикле. Задача для поиска решения задается вне цикла, а функция `SolverChange()` в рамках цикла изменяет правую часть ограничения (целевую ожидаемую доходность). В цикле результаты каждой итерации `Solver()` копируются в диапазон на рабочем листе с помощью команды `PasteSpecial`. Код цикла приведен ниже.

```
Do While iter <= niter
  Call SolverSolve(True)
  SolverFinish
  Range("portwts2").Copy
  Range("effwts2").Offset(iter, 0).PasteSpecial Paste:=xlValues
  Range("priter2") = Range("priter2").Value + pradd
  Call SolverChange(Range("portret"), 2, Range("priter2"))
  iter = iter + 1
Loop
```

В последней части макроса дважды используется надстройка Поиск решения, сначала для вычисления минимальной доходности портфеля, которая достигается при заданных ограничениях (функция `SolverOk()` имеет значение 2), а затем для вычисления максимальной доходности (функция `SolverOk()` имеет значение 1). Диапазон между этими двумя уровнями доходности делится на заданное количество целевых доходностей, для каждой из которых определяются и сохраняются веса эффективного портфеля.

```
SolverReset
Call SolverAdd(Range("portwts2"), 3,
Range("portmin2"))
Call SolverAdd(Range("portwts2"), 1,
Range("portmax2"))
Call SolverOk(Range("portret2"), 2, 0,
Range("change2"))
Call SolverSolve(True)
SolverFinish
prmin = Range("portret2").Value
Call SolverOk(Range("portret2"), 1, 0, Range("change2"))
Call SolverSolve(True)
SolverFinish
```

Резюме

Вся вторая часть книги, посвященная акциям, базируется на теории портфельной оптимизации, разработанной Марковицем. В данной главе было показано, как основные формулы для средней доходности и дисперсии портфеля из двух активов можно легко обобщить для большего числа активов, используя функции массивов в Excel. Функции массива, выполняющие умножение матриц и вычисление обратных матриц, позволяют реализовать аналитическое решение Хуанга и Литценбергера для получения эффективной границы. Это показано в форме электронных таблиц, а также в виде специальных функций.

Хотя теория вопроса очень важна, ее практическая реализация требует числовых методов решения, например может использоваться надстройка Поиск решения (Solver). В данной главе показано, что решение, полученное с помощью этой надстройки, совпадает с аналитическим решением Хуанга и Литценбергера для случая без ограничений на веса; кроме того, приведен пример использования надстройки Поиск решения для случая, когда на веса отдельных активов наложены ограничения. Использование надстройки Поиск решения показано как в электронных таблицах, так и с помощью макросов (для многократного применения метода).

В главе 7, “Оценка акций”, рассматривается следующая важная веха в инвестиционной теории — ценовая модель рынка капитала и роль коэффициента “бета”. Мы перейдем к использованию логнормального распределения доходностей акций для прогнозирования благосостояния инвестора и к применению анализа инвестиций с учетом риска для отдельных акций и портфелей.

Список рекомендуемой литературы

1. Боди З., Кейн А., Маркус А. *Принципы инвестиций, 4-е изд.* — М. : Издательский дом "Вильямс", 2002. — 984 с.
2. Huang C. and Litzenberger R. *Foundations for Financial Economics*. — New York : North Holland, 1988.
3. Eppen G. D., Gould F. J., Schmidt C. P., Moore J. H. and Weatherford L. R. *Introductory Management Science, Decision Modelling with Spreadsheets*, 5^{th} *ed.* — New Jersey : Prentice Hall, 1998.
4. Elton E. J. and Gruber M. J. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis.* — Chichester : John Wiley & Sons, 1995.
5. Taggart R. A. *Quantitative Analysis for Investment Management*. — New Jersey : Prentice Hall, 1996.