Приложение

Необходимые сведения из математики

Для понимания содержания книги достаточно знания элементарной математики в объеме средней школы. Поскольку в книге встречаются ссылки на факты математического анализа и линейной алгебры, опишем основные операции и обозначения, которые встречаются в тексте.

Суммирование набора чисел

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

обозначается как

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — это упорядоченный набор из n чисел. Над векторами выполняются три операции:

1) сложение: $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$,
2) вычитание: $x - y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$
3) умножение на число: $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Матрицей A называется прямоугольная таблица, состоящая из чисел a_{ij}, где номер строки i изменяется от 1 до n, а номер столбца j — от 1 до m:

$$A = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\}$$

Таким образом, матрица A состоит из n строк и m столбцов, которые являются векторами. Если количество строк равно количеству столбцов, то матрица называется квадратной. Приведем пример прямоугольных и квадратных матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Элементы с одинаковыми индексами a_{ij} образуют *главную диагональ* матрицы.

Над матрицами выполняются шесть операций: умножение на число, сложение, вычитание, умножение, транспонирование и обращение.

1. Умножение на число — каждый элемент матрицы умножается на одно и то же число:

$$\lambda A = \begin{Bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{Bmatrix}.$$

2. Сложение матриц — элементы матриц складываются попарно:

$$A + B = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{Bmatrix}$$

3. Вычитание матриц — элементы второй матрицы попарно вычитаются из элементов первой матрицы:

$$A - B = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \ldots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \ldots & a_{2n}-b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \ldots & a_{mn}-b_{mn} \end{Bmatrix}$$

4. Умножение матриц: элементы первой матрицы строка за строкой умножаются на соответствующие элементы второй матрицы столбец за столбцом, а полученные произведения складываются:

$$AB = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{im} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{im} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{in} \end{Bmatrix}.$$

Операция умножения матриц не является коммутативной:

$$AB \neq BA.$$

5. Транспонирование квадратной матрицы — элементы матрицы меняются местами симметрично относительно главной диагонали: первая строка становится первым столбцом, вторая строка — вторым столбцом и т.д.:

$$A^T = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{Bmatrix}$$

6. Обращение квадратной матрицы. Для квадратной матрицы A вводится обратная матрица A^{-1}, такая что произведение матрицы A на ее обратную матрицу равно единичной матрице:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

У единичной матрицы на диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Обратная матрица существует не у всех квадратных матриц, а лишь у тех, у которых так называемый *определитель* не равен нулю.

Кроме того, в тексте используются некоторые понятия математического анализа. В частности, обозначение $x_n \to x$ при $n \to \infty$ означает, что число x_n приближается к числу x при неограниченном увеличении индекса n.