Глава 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОЧТИ РЕШЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие почти решения для операторного уравнения

$$A(x) = y, \qquad x \in E, y \in F, \tag{5.1}$$

где A — ограниченный инъективный линейный оператор, действующий из банахова пространства E в банахово пространство F, в предыдущих главах возникало при исследовании обобщенных решений уравнения (5.1).

Напомним, что сильное почти решение, описанное в главе 2, возникает в том случае, когда на пространстве E введена топология $\mathcal{T}_A$, порожденную нормой $\|x\|_{\bar{E}} = \|A(x)\|_F$, где $\bar{E}$ — пополнение E по норме $\|x\|_{\bar{E}}$. При этом банахово пространство E будет плотно вложено в банахово пространство $\bar{E}$ и оператор A можно расширить по непрерывности на все пространство $\bar{E}$. Обозначая это расширение через $\bar{A}$, мы получаем ограниченный линейный оператор $\bar{A}$, действующий из $\bar{E}$ в F. Сильным почти решением уравнения (5.1) называют такую последовательность $x_n \in E$, что $A(x_n)$ сходится к y в пространстве F. Такая последовательность x_n является фундаментальной в пространстве $\bar{E}$, а, значит $x_n \to \widetilde{x}$ при $n \to \infty$, где $\widetilde{x}$ — обобщенное решение уравнения (5.1), т.е. $\bar{A}(\widetilde{x}) = y$.

5.1. Построение почти решений. Редукция к проблеме решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть E — банахово пространство с базисом Шаудера $e_1, e_2, \ldots$, где $e_n \in E$ и $F = H$ — гильбертово пространство. Обозначим $A(e_k) = \widetilde{e}_k \in F = H$. Нетрудно заметить, что каждый элемент $\bar{y} \in R(A)$ можно представить в виде

$$\bar{y} = A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \widetilde{e}_k,$$

где $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Отсюда следует, что для любой последовательности ε_n положительных чисел, стремящихся к нулю, и для произвольного элемента $y \in F$ существует такой элемент

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n e_k,$$

для которого

$$\|y - y_n\| = \Big\| y - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(n)} \widetilde{e}_k \Big\| < \varepsilon_n.$$

Рассмотрим конечномерное подпространство

$$\mathcal{L}_n = \Big\{ u : u = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \widetilde{e}_k,\ \gamma_k \in \mathbb{R} \Big\} \subset F$$

и пусть $y_n^* = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* \widetilde{e}_k$ — элемент наилучшего приближения к y из подпространства $\mathcal{L}_n$:

$$\|y - y_n^*\| = \min_{\beta_k} \Big\| y - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \widetilde{e}_k \Big\|,$$

тогда

$$\|y - y_n^*\| = \Big\| y - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* \widetilde{e}_k \Big\| < \varepsilon_n.$$

Положим

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* e_k$$

и покажем, что x_n является почти решением операторного уравнения (5.1). Действительно,

$$A(x_n) = A\Big(\sum_{k=1}^{n} \beta_k^* e_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* A\,(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* \widetilde{e}_k = y_n^* \to y$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, почти решения x_n можно получить, если удастся определить элемент наилучшего приближения для y из подпространства $\mathcal{L}_n$, а эта проблема в случае гильбертова пространства $F = H$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных β_k^* следующим образом. Поскольку элемент $y - y_n^*$ ортогонален к подпространству $\mathcal{L}_n$, то

$$(y - y_n^*, \widetilde{e}_l) = \Big(y - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* \widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l \Big) = (y, \widetilde{e}_l) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* \,(\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l) = 0,$$

где $l = 1, 2, \ldots, n$.

Полагая $a_{lk} = (\widetilde{e}_k, \widetilde{e}_l)$, $b_l = (y, \widetilde{e}_l)$, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\beta_k^* = b_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Таким образом, проблема решения системы линейных алгебраических уравнений (5.2) является первостепенной задачей для вычисления почти решения операторного уравнения (5.1).

В настоящее время существует большое число методов решений систем линейных алгебраических уравнений [64]. Как известно, эти методы разделяются на точные и приближенные. В термине "точные методы" больше иронии, нежели правды, поскольку при их компьютерной реализации можно получить такие решения, которые настолько значительно отличаются от настоящих точных решений, что это невозможно представить даже при большой фантазии; как говорят уже в который раз действительность превосходит фантазию. Причины этого явления связаны с влиянием на точность компьютерных вычислений большого количества трудно контролируемых (или даже неконтролируемых вообще) факторов, в частности с накоплением ошибок в результате округления получаемых чисел. В связи с этим будем рассматривать в основном лишь приближенные методы решения систем линейных алгебраических уравнений и основное внимание будет уделено приближенным решениям с заранее заданной точностью.

5.2. Метод рядов Неймана.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{5.3}$$

где $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — невырожденная матрица n-го порядка ($detA \neq 0$), $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — элементы пространства $\mathbb{R}^n$. Принимая во внимание преобразование Гаусса, имеем

$$A^*Ax = A^*b, \tag{5.4}$$

где A^* — сопряженная матрица. Очевидно, что система (5.4) эквивалентна первоначальной системе (5.3), однако во втором случае матрица системы $M = A^*A$ является симметричной и положительно определенной. В связи с этим можно без ограничения общности считать, что матрица A первоначальной системы (5.3) будет симметричной и положительно определенной.

В силу этого предположения матрица A имеет n положительных собственных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ($\mu_k > 0$). Покажем, что существует такая положительная константа $\mu > 0$, что норма (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$) матрицы $U = I - \mu A$ (I — единичная матрица) будет меньше единицы: $\|U\| < 1$. Действительно, в силу теоремы Гирша-Бендексона справедливо неравенство

$$|\mu_k| \leqslant nq = \delta, \tag{5.5}$$

где

$$q = \max|a_{ij}|, \tag{5.6}$$

a_{ij} — элементы матрицы A.

Положим $\mu = 1/\delta$, тогда

$$U = I - \mu A = I - \frac{1}{\delta}A. \tag{5.7}$$

Заметим, что неравенство (5.5), а потому и выбор параметра μ, можно уточнить с помощью следующих соображений. Следуя книге [64], будем называть нормой матрицы A всякую норму $\|A\|$, определенную в векторном пространстве матриц размерности n^2, для которой справедливо мультипликативное неравенство $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ (см. [64]). Как показано в [64] модуль каждого собственного числа матрицы не превосходит любой из возможных норм. Заметим, что функционал $\delta(A) = \delta = nq = n\max|a_{ij}|$ является так называемой M-нормой $M(A)$, поэтому справедливо неравенство (5.5) Гирша-Бендексона. Если взять N-норму

$$N(A) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2},$$

то в силу вышеуказанного

$$|\mu_k| \leqslant N(A) \tag{5.8}$$

и поскольку $N(A) \leqslant M(A)$ (см. [64]), то неравенство (5.8) является более точным по сравнению с неравенством Гирша-Бендексона и за δ можно принять число $N(A)$ и даже любую норму матрицы A. Возвращаясь к доказательству неравенства $\|U\| < 1$, заметим, что матрица U имеет следующие собственные значения $\gamma_k = 1 - \mu\mu_k$, следовательно $|\gamma_k| = \left|1 - \frac{\mu_k}{\delta}\right| < 1$. Поскольку $0 < \mu_k/\delta < 1$, то $\|U\| = \max|\gamma_k| < 1$. Таким образом, система линейных алгебраических уравнений

$$A_\mu x = \mu A x = \mu b, \qquad \mu = 1/\delta \tag{5.9}$$

эквивалентна системе (5.3), однако матрицу $A_\mu = \mu A$ можно представить в виде $A_\mu = I - U$, где $\|U\| < 1$. На основании хорошо известных результатов теории матриц (см., например, [64]) ряд Неймана

$$A_\mu^{-1} = (I-U)^{-1} = I + U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots \tag{5.10}$$

будет сходится и поскольку $\|U\| < 1$, то A_μ^{-1} можно аппроксимировать частичной суммой ряда (5.10)

$$A_\mu^{-1} \approx I + U + U^2 + \ldots + U^k = U_k. \tag{5.11}$$

Таким образом, полагая $\widetilde{x}_k = U_k\,(\mu b) = \mu(U_k b)$, получим, что $\widetilde{x}_k \to x$ при $k \to \infty$, а это означает, что $\widetilde{x}_k$ можно принять за приближенное решение системы (5.3). Мы будем называть описанный выше метод приближенного решения системы (5.3) методом рядов Неймана.

Найдем ошибку k-го приближения этого метода. Положим $\widetilde{q} = \|U\| < 1$, где $\|U\|$ — норма U в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\|A_\mu^{-1}\| \leqslant \|I\| + \|U\| + \|U^2\| + \ldots + \|U^k\| + \ldots \leqslant \tag{5.12}$$
$$\leqslant 1 + \|U\| + \|U\|^2 + \ldots + \|U\|^k + \ldots = 1 + \widetilde{q} + \widetilde{q}^2 + \ldots + \widetilde{q}^k + \ldots = \frac{1}{1-\widetilde{q}},$$

поэтому

$$\|x - \widetilde{x}_k\| = \left\|A_\mu^{-1}(\mu b) - \mu U_k(b)\right\| = |\mu| \cdot \left\|\left(A_\mu^{-1} - U_k\right)(b)\right\| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu| \cdot \left(\|U\|^{k+1} + \|U\|^{k+2} + \ldots\right) \cdot \|b\| \leqslant |\mu| \cdot \|b\| \cdot \frac{\widetilde{q}^k}{1-\widetilde{q}} = C\widetilde{q}^k,$$

где $\widetilde{q} = \|U\| < 1$, $C = \frac{|\mu|\cdot\|b\|}{1-\widetilde{q}}$.

Таким образом, доказано, что для ошибки приближенного решения $\widetilde{x}_k$ имеет место неравенство

$$\|x - \widetilde{x}_k\| \leqslant C\widetilde{q}^k, \tag{5.13}$$

так что $\widetilde{x}_k$ сходится к точному решению со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $\widetilde{q} < 1$, а приведённые формулы дают возможность оценить не только точность k-го приближения, но и норму обратного оператора A^{-1}, не вычисляя его самого:

$$\|A^{-1}\| = |\mu| \cdot \|A_\mu^{-1}\| \leqslant \frac{\mu}{1-\widetilde{q}}, \qquad \mu = \frac{1}{\delta}. \tag{5.14}$$

Приведённая оценка, конечно, подразумевает возможность вычисления евклидовой нормы оператора U или, по крайней мере, наличие оценки сверху для значения этой нормы $\|U\| = \widetilde{q} \leqslant q^* < 1$ (такую оценку называют мажорантной).

Решение системы линейных алгебраических уравнений, в связи с изложенным методом рядов Неймана, можно рассматривать с иных позиций. Действительно, как уже отмечалось выше, система (5.3) эквивалентна системе

$$(I - U)(x) = \mu b = \widetilde{b}, \qquad \mu = \frac{1}{\delta}$$

или
$$\widetilde{U}(x) = \widetilde{b} + U(x) = x.$$

Таким образом, решение системы (5.3), в конечном счете, сводится к проблеме нахождения неподвижной точки оператора $\widetilde{U}$. Покажем, что оператор $\widetilde{U}$ является сжимающим отображением, действующим в метрическом пространстве $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. В самом деле, для всех $u, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\rho(\widetilde{U}(u), \widetilde{U}(v)) = \left\|\widetilde{U}(u) - \widetilde{U}(v)\right\| = \|U(u) - U(v)\| \leqslant \|U\| \cdot \|u - v\| = \widetilde{q} \cdot \rho(u, v),$$

где $\widetilde{q} = \|U\| < 1$.

Как известно (см. [12]), неподвижная точка x оператора может быть получена как предел итерационного процесса последовательных приближений
$$x_{n+1} = \widetilde{U}(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.15}$$

где x_0 — произвольный элемент из $\mathbb{R}^n$, а скорость сходимости последовательности x_n к решению x задается неравенством

$$\rho(x_n, x) \leqslant \frac{\widetilde{q}^n}{1 - \widetilde{q}} \cdot \rho(x_1, x_0). \tag{5.16}$$

Таким образом, решение произвольной системы линейных алгебраических уравнений сводится к проблеме отыскания неподвижной точки оператора сжатия.

Рассмотрим теперь связь между итерационным процессом (5.15) и приближенным решением

$$\widetilde{x}_n = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^n\widetilde{b},$$

полученным методом рядов Неймана. Легко видеть, что это приближенное решение x_n можно получить с помощью процесса последовательных приближений (5.15), если за начальный элемент x_0 итерационного процесса взять вектор $\widetilde{b}$: $x_0 = \widetilde{b}$. Действительно,

$$\widetilde{x}_n = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^n\widetilde{b} = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^{n-2}\widetilde{b} + U^{n-1}\left(\widetilde{b} + U\widetilde{b}\right) =$$
$$= \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^{n-2}\widetilde{b} + U^{n-1}\left[\widetilde{U}(\widetilde{b})\right] = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^{n-2}\widetilde{b} + U^{n-1}x_1.$$

Продолжая аналогично, получаем

$$\widetilde{x}_n = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^{n-2}\left(\widetilde{b} + Ux_1\right) = \widetilde{b} + U\widetilde{b} + \ldots + U^{n-2}x_2 =$$
$$= \ldots = \widetilde{b} + U(x_{n-1}) = \widetilde{U}x_{n-1} = x_n.$$

Таким образом, приближенное решение $\widetilde{x}_n$, вычисленное с помощью метода рядов Неймана, совпадает с n-ой итерацией элемента $x_0 = \widetilde{b}$. Этот факт позволяет дать практические рекомендации для приближенного решения системы (5.3). Как известно, одной из наиболее трудных и сложных проблем при использовании метода последовательных приближений является выбор первоначального приближения x_0. Если этот выбор сделан удачно, то $x_1 \approx x_0$ и второй множитель $\rho(x_1, x_0)$ в формуле (5.16) для скорости сходимости итерационного процесса будет малой величиной, поэтому можно надеяться на то, что и вся правая часть (5.16) будет принимать малые значения. Если искать приближенное решение методом рядов Неймана, то за начальное приближение x_0 итерационного процесса (5.15) принимается вектор $\widetilde{b}$, который может отстоять от точного решения x в евклидовой метрике на большом расстоянии, так что величина $\rho(x_1, x_0)$ не является малой и поэтому метод рядов Неймана может давать плохие приближенные решения. Однако, если за первоначальный вектор x_0 итерационного процесса взять эти "плохие" приближенные решения, которые все-таки лучше, чем "произвольный" элемент $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то последующие уточнения решения, полученные с помощью процесса последовательных приближений, могут дать удовлетворительные результаты.

Перейдем теперь к проблеме вычисления мажорантной оценки q^* нормы для матрицы U. Как известно, евклидова норма матрицы U, т.е. норма линейного самосопряженного оператора $y = U(x)$, вычисляется по формуле

$$\widetilde{q} = M = \sup_{\|x\|=1} (Ux, x) = \sup_{x \neq \theta} \frac{(Ux, x)}{(x, x)} = (Ux^*, x^*),$$

где x^* — нормированный собственный элемент (вектор), отвечающий наибольшему собственному значению $\lambda_1 = M$. Покажем, что произвольная последовательность x_n, сходящаяся при $n \to \infty$ к собственному элементу x^*, после ее нормирования $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ также будет сходиться к x^* и $(Uy_n, y_n) \to M$ при $n \to \infty$. В самом деле, поскольку $\|x_n\| \to \|x^*\| = 1$ при $n \to \infty$, то

$$\|x_n - y_n\| = \left\| x_n - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| = \left\| x_n \left(1 - \frac{1}{\|x_n\|} \right) \right\| \to 0,$$

и значит $y_n = x_n + (y_n - x_n) \to x^*$ при $n \to \infty$.

С другой стороны,

$$\|U(x^*) - U(y_n)\| = \|U(x^*) - U(x_n) + U(x_n) - U(y_n)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U\| \cdot \|x^* - x_n\| + \|U\| \cdot \|x_n - y_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, доказано, что $U(y_n) \to U(x^*)$ и $y_n \to x^*$ при $n \to \infty$ и поэтому $(Uy_n, y_n) \to (Ux^*, x^*) = M$.

Учитывая, что $\|y_n\| = 1$, получаем неравенство

$$\|U(y_n)\| \leqslant \|U\| < 1,$$

поэтому $U(y_n) < 1$ и при больших n величину $q^* = \|U(y_n)\|$ можно принять за оценку $\|U\|$, правда эта оценка не будет мажорантной (неравенство $\|U\| \leqslant q^*$ может не выполняться), однако условие $q^* < 1$, которое будет необходимо при вычислении числа обусловленности матрицы A тут выполняется.

В качестве такой последовательности x_n, сходящейся к x^* и позволяющей найти максимум функционала

$$l(x) = \frac{(Ux, x)}{(x, x)},$$

можно взять последовательность, полученную методом скорейшего спуска; при этом нет необходимости ее нормирования, поскольку $\|x_n\| = 1$. В этом случае скорость сходимости $(Ux_n, x_n) = l(x_n) \to M$ характеризуется геометрической прогрессией (см. [64]).

5.3. Число обусловленности матрицы.

После построения приближенного метода решения системы линейных алгебраических уравнений естественным образом возникает вопрос о том, насколько удовлетворительным является метод рядов Неймана и метод последовательных приближений при их компьютерной реализации и насколько трудной является проблема вычисления мажорантной нормы оператора U. Отметим, что последняя проблема необходима для вычисления приближенного решения системы с гарантированной точностью.

Ответы на поставленные вопросы зависят от числа обусловленности матрицы A. Начнем с неформального определения этого понятия. Как известно (см. [64]), обратную матрицу A^{-1} называют устойчивой, если малым изменениям в элементах исходной матрицы A будут соответствовать малые изменения в элементах обратной матрицы. Матрицу A называют плохо обусловленной, если соответствующая ей обратная матрица будет неустойчивой. Для характеристики матрицы с точки зрения ее обусловленности несколькими авторами предложены различные характеристики, называемые числами обусловленности (см. [64]). Это два числа Тьюринга

$$N = \frac{1}{n} \cdot N(A) \cdot N(A^{-1}), \tag{5.17}$$

$$M = \frac{1}{n} \cdot M(A) \cdot M(A^{-1}) \tag{5.18}$$

и два числа Тодда

$$P = \frac{\max|\mu_i|}{\min|\mu_i|}, \tag{5.19}$$

$$H = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|, \tag{5.20}$$

где $\|A\|$ — евклидова норма матрицы A. Как указывает Д.К. Фаддеев и В.Н. Фаддеева (см. [64]) эти числа обусловленности не дают, конечно, исчерпывающей характеристики обусловленности матрицы. В связи с этим мы начнем исследование других чисел обусловленности матрицы и установим их связь з показателями (5.17)-(5.20). Прежде всего отметим, что фактически во всех числах обусловленности в том или ином виде присутствует норма обратной матрицы $\|A^{-1}\|$. Поскольку вычисление обратной матрицы является трудно выполнимой вычислительной процедурой, то желательно предложить такие числа обусловленности, в которых эта операция отсутствует. Это можно сделать, вводя следующую модификацию числа обусловленности

$$\tau^*(A) = \frac{1}{1 - \|U\|}, \tag{5.21}$$

где матрица U определяется по формуле (5.7).

Пусть $\tau_1(A)$ и $\tau_2(A)$ — любая пара классических чисел обусловленности (5.17)-(5.20). В статье [53] показано, что $\tau_1(A)$ и $\tau_2(A)$ эквивалентны в следующем смысле

$$\tau_1(A_m) \to +\infty \;\Leftrightarrow\; \tau_2(A_m) \to +\infty, \quad \text{при } m \to \infty,$$

где A_m — последовательность невырожденных матриц порядка $n \times n$. Поэтому естественно возникает проблема эквивалентности числа обусловленности $\tau^*(A)$ и произвольного классического числа, например, $\tau(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

Теорема 25. *Пусть A_m — произвольная последовательность симметричных положительно определенных матриц порядка $n \times n$. Последовательность чисел обусловленности $\tau(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\tau^*(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$.*

Доказательство. Необходимость. Положим для определенности $\tau(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, где $\|A\|$ — евклидова норма. Тогда имеем, что

$$\tau(A_\mu) = \tau(\mu A) = \tau(A)$$

и

$$\|A_\mu\| = \|I - U\| \leqslant \|I\| + \|U\| \leqslant 2.$$

В силу формулы (5.12) имеет место оценка

$$\|A_\mu^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\|U\|} = \tau^*(A).$$

Таким образом, установлено, что

$$\tau(A) = \tau(A_\mu) = \|A_\mu\| \cdot \|A_\mu^{-1}\| \leqslant 2\tau^*(A),$$

а значит, если $\tau(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$, то и $\tau^*(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$.

Достаточность. Пусть $\tau^*(A_m) \to \infty$ при $m \to \infty$, тогда $\|U_m\| \to 1$ при $m \to \infty$, поскольку $U_m = I - \mu^{(m)} A_m$, $\mu^{(m)} = \frac{1}{\delta^{(m)}}$ и $\delta^{(m)} = M(A_m)$, $m \in \mathbb{N}$.

Обозначим через

$$\mu_1^{(m)} \leqslant \mu_2^{(m)} \leqslant \ldots \leqslant \mu_n^{(m)}$$

собственные числа матрицы A_m, тогда $\mu_1^{(m)}/\delta^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$. Поскольку нормы $\delta^{(m)} = M(A_m)$ и $\|A_m\| = \mu_n^{(m)}$ в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ эквивалентны, то существует такая константа $c > 0$, что $M(A_m) \leqslant c\|A_m\|$. Следовательно

$$\frac{\mu_1^{(m)}}{\delta^{(m)}} = \frac{\mu_1^{(m)}}{M(A_m)} \geqslant \frac{\mu_1^{(m)}}{c\|A_m\|} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\mu_1^{(m)}}{\mu_n^{(m)}}.$$

Из этого неравенства и предельного соотношения $\mu_1^{(m)}/\delta^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$ вытекает, что $\mu_1^{(m)}/\mu_n^{(m)} \to 0$ при $m \to \infty$, а это означает, что $\tau(A_m) = \mu_n^{(m)}/\mu_1^{(m)} \to \infty$ при $m \to \infty$. □

Из теоремы следует, что классические числа обусловленности матрицы (5.17)-(5.20), то есть числа Тьюринга и Тодда, эквивалентны числу обусловленности (5.21), поскольку плохо обусловленные матрицы характеризуются как матрицы, имеющие большие числа обусловленности. Тем не менее использование числа обусловленности $\tau^*(A)$ более предпочтительно по сравнению с числами Тьюринга и Тодда, так как при вычислении $\tau^*(A)$ не нужно вычислять или оценивать норму обратной матрицы A^{-1}, а необходимо лишь оценить норму матрицы $U = I - \mu A$, $\mu = \frac{1}{\delta}$, $\delta = M(A)$. На первый взгляд проблема оценки евклидовой нормы симметричной матрицы A является хорошо исследованной и в этой области получены законченные фундаментальные результаты. Одним из таких широко разрекламированных результатов является хорошо известный степенной метод вычисления евклидовой нормы матрицы, описанный, например, в [64], который позволяет построить числовую последовательность u_n, сходящуюся к норме матрицы U: $u_n \to \|U\|$ при $n \to \infty$. Однако для оценки числа обусловленности матрицы по формуле (5.21) необходима мажорантная оценка нормы матрицы U, а оценки, полученные степенным методом, как показывают компьютерные вычисления, мажорантными не являются. Например, в случае, когда A — матрица Гильберта, последовательность u_n может стремится к $\|U\|$ снизу. С другой стороны, u_n может принимать значения, большие единицы, а использование таких оценок в формуле (5.21) даёт абсурдные результаты (число обусловленности принимает отрицательные значения).

5.4. Точность приближенного решения.

Рассмотрим теперь вопрос о точности приближенного решения x_k, полученного методом рядов Неймана, про его компьютерной реализации. Если число обусловленности матрицы A не слишком велико, то этот метод даёт вполне удовлетворительные результаты. Такая ситуация имеет место, например, при решении системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ с матрицей Гильберта $A = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$ пятидесятого порядка ($n = 50$) с правой частью b, полученной при подстановке в левую часть неизвестных, тождественно равных единице. В случае, когда частичная сумма ряда Неймана содержит 20000 членов, приближенное решение имеет вид

Табл.1 Приближенные решения системы линейных алгебраических уравнений с матрицей Гильберта методом рядов Неймана, $k = 20\,000$

$x_1 = 1,0000$	$x_2 = 0,9998$	$x_3 = 1,0004$	$x_4 = 1,0006$	$x_5 = 0,9997$
$x_6 = 0,9991$	$x_7 = 0,9991$	$x_8 = 0,9996$	$x_9 = 1,0001$	$x_{10} = 1,0006$
$x_{11} = 1,0009$	$x_{12} = 1,0011$	$x_{13} = 1,0010$	$x_{14} = 1,0008$	$x_{15} = 1,0006$
$x_{16} = 1,0002$	$x_{17} = 0,9999$	$x_{18} = 0,9996$	$x_{19} = 0,9993$	$x_{20} = 0,9991$
$x_{21} = 0,9989$	$x_{22} = 0,9989$	$x_{23} = 0,9988$	$x_{24} = 0,9989$	$x_{25} = 0,9990$
$x_{26} = 0,9991$	$x_{27} = 0,9993$	$x_{28} = 0,9996$	$x_{29} = 0,9998$	$x_{30} = 1,0000$
$x_{31} = 1,0003$	$x_{32} = 1,0005$	$x_{33} = 1,0008$	$x_{34} = 1,0010$	$x_{35} = 1,0011$
$x_{36} = 1,0013$	$x_{37} = 1,0013$	$x_{38} = 1,0014$	$x_{39} = 1,0014$	$x_{40} = 1,0013$
$x_{41} = 1,0012$	$x_{42} = 1,0010$	$x_{43} = 1,0008$	$x_{44} = 1,0004$	$x_{45} = 1,0001$
$x_{46} = 0,9996$	$x_{47} = 0,9991$	$x_{48} = 0,9985$	$x_{49} = 0,99790$	$x_{50} = 0,9972$

Анализ данных табл. 1 показывает, что приближенное решение имеет незначительные относительные ошибки (менее $0,2\%$), поэтому, в данном случае, оно является достаточно точным. Тем не менее скорость сходимости метода рядов Неймана — это скорость сходимости геометрической прогрессии со знаменателем, возможно, близким к единицы. Такая скорость будет достаточно небольшой при решении плохо обусловленных систем (с большим числом обусловленности). В самом деле, в силу формулы (5.13)

$$\|x - \widetilde{x}_k\| \leqslant C\widetilde{q}^k,$$

где $\widetilde{x}_k$ содержит $(k+1)$ слагаемое в сумме ряда Неймана, $\widetilde{q} = \|U\|$, а C — некоторая константа. Поскольку мы имеем дело с плохо обусловленными матрицами, то на основании теоремы 25 число $\widetilde{q}$ будет близким к единице. Предположим, что $\widetilde{q} = 0,9999999 = 1 - 10^{-7}$, а константа $C = 1$ (если $c > 1$, то для достижения необходимой точности k потребуется увеличить). С помощью оценки (5.13) можно найти значение k, обеспечивающее точность, например, $\varepsilon = 0,001$. Оказывается, что для достижения такой точности потребуется порядка шестидесяти миллионов слагаемых в ряде Неймана. Отметим, что это число значительно превышает число итераций, проделанных в при компьютерной реализации метода (см. табл. 1).

5.5. Метод Хотеллинга исправления элементов обратной матрицы и универсальный комбинированный метод решения системы линейных алгебраических уравнений.

Частичную сумму ряда Неймана U_k (формула (5.11)) можно рассматривать как приближенное значение обратной матрицы A_μ^{-1} системы (5.9), поскольку $U_k \to A_\mu^{-1}$ при $n \to \infty$. В связи с этим возникает проблема "исправления" элементов приближенной к A_μ^{-1} матрицы U_k с целью получения более точного значения для матрицы A_μ^{-1}, то есть улучшения качества приближения. Эта проблема "исправления" элементов обратной матрицы была решена Хотеллингом и Шульцем в работах [72, 80]. Сущность метода Хотеллинга заключается в следующем. Предположим, что мы имеем такое приближенное значений D_0 обратной матрицы, что

$$\|R_0\| \leqslant q < 1, \tag{5.22}$$

где $R_0 = I - A_\mu D_0$, I — единичная матрица.

Тогда элементы обратной матрицы A_μ^{-1} могут быть вычислены со сколь угодно большой точностью с помощью следующего итерационного процесса

$$D_m = D_{m-1}\left(I + R_{m-1}\right), \quad R_m = I - A_\mu D_m, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{5.23}$$

при этом

$$\|D_m - A_\mu^{-1}\| \leqslant \|D_0\| \cdot \frac{q^{2^m}}{1-q}. \tag{5.24}$$

Таким образом, при условии выполнения условия (5.22) образуется последовательность приближений D_m быстро сходящаяся к A_μ^{-1} (число верных десятичных знаков возрастает в геометрической прогрессии).

Покажем, что за такое начальное приближение D_0 можно взять любую частичную сумму U_k ряда Неймана, если число k (количество слагаемых) не меньше единицы: $D_0 = U_k$ при $k \geqslant 1$. Действительно,

$$\begin{gathered}\|R_0\| = \|I - A_\mu D_0\| = \|I - (I-U)\,U_k\| = \\ = \|I - (I-U)\left(I + U + U^2 + \ldots + U^k\right)\| = \\ = \|U^{k+1}\| \leqslant \|U\|^{k+1} = \widetilde{q}^{k+1} = q < 1.\end{gathered}$$

Приведенная схема позволяет сформулировать универсальный метод решения систем линейных алгебраических уравнений $A_\mu x = \mu b$, где $\mu = 1/\delta$:

1. вычисляется матрица $U = I - A_\mu$;
2. вычисляется частичная сумма ряда Неймана $U_k = I + U + U^2 + \ldots + U^k$, где $(k \geqslant 1)$;
3. определяется матрица $R_0 = I - A_\mu D_0$, где $D_0 = U_k$;
4. используя итерационный процесс (5.23), вычисляется матрица D_m;
5. приближенное решение x_m определяется по формуле

   $$x_m = D_m(\mu b), \tag{5.25}$$

   при этом ошибка m-го приближения оценивается по формуле

   $$\begin{gathered}\|x - x_m\| \leqslant \left\|A_\mu^{-1}(\mu b) - D_m(\mu b)\right\| = \left\|\left(A_\mu^{-1} - D_m\right)(\mu b)\right\| \leqslant \\ \leqslant \left\|A_\mu^{-1} - D_m\right\| \cdot \|\mu b\| \leqslant \|D_0\| \cdot |\mu| \cdot \|b\| \cdot \frac{q^{2^m}}{1-q} = \\ = \|D_0\| \cdot |\mu| \cdot \|b\| \cdot \frac{\widetilde{q}^{(k+1)\cdot 2^m}}{1 - \widetilde{q}^{(k+1)}} = C\widetilde{q}^{(k+1)2^m},\end{gathered} \tag{5.26}$$

   где

   $$C = \frac{\|D_0\| \cdot \|b\| \cdot |\mu|}{1 - \widetilde{q}^{k+1}} \leqslant \frac{\widetilde{q}^{k+1} \cdot \|b\| \cdot |\mu|}{1 - \widetilde{q}^{k+1}} = C_1, \qquad \widetilde{q} = \|U\| < 1.$$

Отметим, что во всех наших рассуждениях, посвященных методу Хотеллинга, мы использовали только евклидову норму матрицы A, тогда как Хотеллинг пользовался нормой $N(A)$, однако нетрудно заметить, что все рассуждения Хотеллинга сохраняют силу и для евклидовой нормы матрицы. Необходимость введения евклидовой нормы в метод Хотеллинга (а следовательно и в универсальный комбинированный метод) связана с тем обстоятельством, что она является наименьшей среди всех матричных норм, поэтому нам удалось построить первоначальное приближение R_0 так, что выполняется неравенство (5.22); если же пользоваться нормой $N(A)$, то проблема отыскания R_0 становится очень сложной, если вообще не безнадежной.

Перейдем теперь к анализу метода Хотеллинга и универсального комбинированного метода. Нетрудно заметить, что метод Хотеллинга является частным случаем классического метода Ньютона решения нелинейных уравнений: если к уравнению $f(x) = X^{-1} - A = 0$ применить метод Ньютона, то можно получить итерационный процесс Хотеллинга, описанный выше, однако это ни в коей мере не означает, что метод Хотеллинга тривиален. В самом деле, сама идея построения итерационного процесса, для исправления элементов приближенного значения обратной матрицы является неожиданной и плодотворной; кроме того скорость сходимости итерационного процесса, а значит и последовательности приближений x_m к точному решению системы, является очень высокой. Действительно, если в формуле (5.26) положить для просторы $C = 1$, $k = 1$, то получим оценку

$$\|x - x_m\| \leqslant \widetilde{q}^{2^{m+1}}.$$

В предыдущем параграфе было показано, что для $\widetilde{q} = 0,9999999$ ошибка приближенного решения x_k равна $0,0012$ когда число итераций более шестидесяти миллионов, а для универсального комбинированного метода уже для 26 итераций ($m = 26$) ошибка $\|x - x_m\|$ не превосходит $0,0000014$. Таким образом скорость сходимости универсального комбинированного метода просто не сравнима со скоростью сходимости метода рядов Неймана.

В заключении этого параграфа отметим, что выбор числа $(k+1)$ — количества слагаемых в частичной сумме ряда Неймана при использовании универсального комбинированного метода не является очень существенным и, как правило, производится на основании компьютерных экспериментов.

5.6. Точное решение системы линейных алгебраических уравнений методом ортогонализации.

Универсальный комбинированный метод в сочетании с методом ортогонализации во многих случаях позволяет получить точное решение системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим вначале лишь метод ортогонализации и связанные с ним геометрические проблемы. Пусть невырожденная система линейных алгебраических уравнений имеет вид $Ax = b$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5.27}$$

Будем называть векторы-столбцы матрицы A:

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ \dots, \ a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

базисными векторами системы $Ax = b$. С помощью базисных векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ и вектора b, состоящего из правых частей, систему $Ax = b$ можно переписать в виде

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b, \tag{5.28}$$

так, что решение системы (5.27) эквивалентно проблеме разложения вектора b по базисным векторам $a_1, a_2, \dots, a_n$. Используя процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта, систему базисных векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ можно ортогонализовать и получить систему векторов $z_1, z_2, \dots, z_n$. Нетрудно показать, что на основании этой последней системы можно вычислить точное решение системы $Ax = b$ по следующим формулам

$$\begin{gathered} x_n = \frac{(b, z_n)}{(a_n, z_n)}, \ x_{n-1} = \frac{(b, z_{n-1}) - x_n\,(a_n, z_n)}{(a_{n-1}, z_{n-1})}, \dots, \\ x_{n-k} = \frac{(b, z_k) - x_{k+1}\,(a_{k+1}, z_{k+1}) - \dots - x_n\,(a_n, z_n)}{(a_{n-k}, z_{n-k})}, \end{gathered} \tag{5.29}$$

где $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$.

К сожалению, формулы (5.29) далеко не всегда дают точное решение системы, поскольку процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта крайне неустойчив и возникающие при этом ошибки округления могут до неузнаваемости исказить решение системы. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Если базисные векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ нормировать

$$\widetilde{a}_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \ \widetilde{a}_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|}, \dots, \widetilde{a}_n = \frac{a_n}{\|a_n\|},$$

то получим систему

$$\widetilde{x}_1 \widetilde{a}_1 + \widetilde{x}_2 \widetilde{a}_2 + \dots + \widetilde{x}_n \widetilde{a}_n = b, \tag{5.30}$$

которая хотя и не эквивалентна системе (5.28), однако еерешения связаны с решениями (5.28) посредством следующих простых соотношений $\widetilde{x}_k = \|a_k\| x_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$.

Определение 13. *Систему линейных алгебраических уравнений* (5.27) называют *нормированной*, если все ее базисные векторы a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ имеют единичную норму $\|a_i\| = 1$, а операцию перехода от произвольной системы (5.28) к системе (5.30) путем нормирования ее базисных векторов называют нормированием системы.

Как было указано в параграфе 5.3., существующие числа обусловленности не дают исчерпывающей характеристики обусловленности матрицы; более полную информацию об обусловленности матрицы представляет показатель "сплющености" симплекса $S(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_n)$, образованного ее нормированными базисными векторами

$$\operatorname{conv}\{0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n\} = S(\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \widetilde{a}_k,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \leqslant 1,\ \alpha_k \geqslant 0 \right\},$$

а именно объем $V_s = V\{S(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_n)\}$ этого симплекса. Показатель V_s можно вычислить с помощью определителя Грамма системы $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_n$, и он принимает наибольшее значение, если базисные векторы $\widetilde{a}_k$, $k = \overline{1, n}$ образуют ортогональную систему, поэтому близость объема V_s к нулю свидетельствует о плохой обусловленности системы линейных алгебраических уравнений с матрицей A. В работе [53] показано, что для нормированных систем линейных уравнений классические числа обусловленности и показатель V_s (мера "сплющенности") являются эквивалентными, однако произвольные системы могут иметь большие числа обусловленности, тогда как нормированные базисные векторы $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots \widetilde{a}_n$ образуют ортогональные системы. Таким образом, показатель "сплющенности" V_s нормированных базисных векторов дает более полную информацию об обусловленности системы (5.30). Результаты многочисленных компьютерных экспериментов показывают, что в случае "сплющенной" системы нормированных базисных векторов $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots \widetilde{a}_n$, то есть когда объем $V\{S(\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_n)\}$ близок к нулю процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта является неустойчивым и формулы (5.29) дают ошибочные результаты, поэтому эти формулы нельзя использовать для вычисления решения систем линейных алгебраических уравнений. В связи с этим возникает проблема "расплющения" базисных векторов системы, то есть приведение ее к виду $BAx = Bb = \widetilde{b}$ с помощью эквивалентных преобразований так, чтобы матрица $\widetilde{A} = BA$ имела "расплющенные" базисные векторы, а после этого, используя процесс ортогонализации Гильберта-Шмидта базисных векторов системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ и формул (5.29), получить точное решение системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$, а значит и $Ax = b$.

Для этого существует необходимый математический аппарат. Действительно, систему $Ax = b$ можно привести к эквивалентному виду $A_\mu x = \mu Ax = \mu b = \hat{b}$ (см. параграф 5.2.) и затем, используя шаг 4. универсального метода (см. параграф 5.5.), вычислить матрицу D_m, которая является хорошим приближением обратной матрицы A_μ^{-1}. Полагая далее $B = D_m$ мы получаем эквивалентную систему $\widetilde{A}x = D_m A_\mu x = D_m \hat{b} = \widetilde{b}$. Покажем, что система $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ имеет "расплющенные" базисные векторы. В самом деле, пусть ε — произвольное достаточно малое положительное число и матрица

D_m выбрана так, что

$$\left\|A_\mu^{-1} - D_m\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|A_\mu\|}.$$

Обозначим через $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$ базисные векторы системы $\widetilde{A}x = D_m A_\mu x = D_m \hat{b}$ и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — единичные орты в пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Тогда

$$\|e_k - \hat{a}_k\| = \left\|A_\mu^{-1} A_\mu e_k - D_m A_\mu e_k\right\| = \left\|\left(A_\mu^{-1} - D_m\right) A_\mu e_k\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|A_\mu^{-1} - D_m\right\| \cdot \|A_\mu\| \cdot \|e_k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|A_\mu\|} \cdot \|A_\mu\| = \varepsilon.$$

Таким образом, базисные векторы системы $\widetilde{A}x = D_m A_\mu x = D_m \hat{b} = \widetilde{b}$ могут быть сделаны сколь-угодно близкими к единичным ортам e_k, следовательно они являются "расплющенными" и для вычисления точного решения системы $\widetilde{A}x = \widetilde{b}$ можно применять формулы (5.29), которые будут задавать и точное решение исходной системы $Ax = b$.

5.7. Решение систем линейных алгебраических уравнений с гарантированной точностью. Нормирование систем.

Прежде всего рассмотрим понятие точности приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений. Пусть x — точное решение системы $Ax = b$, а $\widetilde{x}$ — приближенное решение. Обозначим $\widetilde{b} = A\widetilde{x}$, кроме этого зафиксируем некоторые положительные числа α, β.

Определение 14. *Точностью приближенного решения* $\widetilde{x}$ системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ будем называть число

$$e(\widetilde{x}) = \alpha\|x - \widetilde{x}\|^2 + \beta\|b - \widetilde{b}\|^2,$$

где $\|x - \widetilde{x}\| = \rho(x, \widetilde{x})$ — евклидово расстояние (или расстояние в каком-либо конечномерном банаховом пространстве) от точного решения до приближенного, $\|b - \widetilde{b}\|$ — невязка, α, β — положительные числа.

Во многих (но не во всех!) практически важных случаях разумно полагать, что $\alpha = 1, \beta = 0$, т.е. определять точность решения как квадрат расстояния между точным и приближенным решением, поэтому всюду в дальнейшем, если это специально не оговорено, мы будем считать, что $e(\widetilde{x}) = \|x - \widetilde{x}\|^2$. Вычислить точность $e(\widetilde{x})$, как правило, невозможно, поскольку неизвестным является точное решение x, однако показатель $e(\widetilde{x})$

удается оценить, если известна норма (например, евклидова) обратной матрицы A^{-1} или ее оценка сверху, так как

$$\|x - \widetilde{x}\| = \left\|A^{-1}b - A^{-1}\widetilde{b}\right\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|b - \widetilde{b}\| \tag{5.31}$$

В параграфе 5.2. была указана оценка (5.14) для нормы $\|A^{-1}\|$, однако для этого нужно вычислить евклидову норму матрицы $U = I - \mu A$ или найти ее мажорантную оценку q^*. Поскольку эти проблемы являются очень трудными, то возникает идея использовать для оценки $\|U\|$ какую-либо легко вычисляемую неевклидову норму. Очевидно, что нормы $N(U)$ и $M(U)$ для этой цели мало пригодны, поскольку $N(I) = \sqrt{n}$, а $M(I) = n$, однако существует операторная норма матрицы U в пространстве $l_1^{(n)}$ (так называемая вторая норма)

$$\|U\|_{II} = \max_k \sum_{i=1}^{n} |u_{ik}|\,, \tag{5.32}$$

для которой $\|I\|_{II} = 1$. В связи с этим возникает следующий вопрос: пусть A — положительно определенная симметричная матрица; можно ли подобрать такое число $\lambda > 0$, чтобы норма $\|U\|_{II}$ матрицы $U = I - \lambda A$ была меньше единицы: $\|U\|_{II} < 1$? Частичный ответ на этот вопрос позволяет дать следующее свойство матриц.

Определение 15. Про матрицу $A = \{a_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ говорят, что она имеет *диагональное преобладание*, если для всех $k = \overline{1,n}$ выполняется неравенство

$$a_{kk} > (|a_{1k}| + |a_{2k}| + \ldots + |a_{nk}| - |a_{kk}|) = A_k$$

Теорема 26. *Если симметричная матрица A с положительными диагональными элементами имеет диагональное преобладание, то существует такое число $\lambda > 0$, что вторая норма матрицы $U = I - \lambda A$ меньше единицы: $\|U\|_{II} < 1$.*

Доказательство. Пусть Λ — диагональная матрица, диагональные элементы которой равны $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и пусть $U^* = I - A\Lambda$. Тогда

$$\|U^*\|_{II} = \|I - A\Lambda\|_{II} = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big\{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_k a_{ik}| + |1 - \lambda_k a_{kk}|\Big\}.$$

Рассмотрим функцию $f_k(\lambda_k)$, которая имеет вид

$$f_k(\lambda_k) = |\lambda_k a_{1k}| + |\lambda_k a_{2k}| + \ldots + |1 - \lambda_k a_{kk}| + \ldots + |\lambda_k a_{nk}|$$

или после преобразований

$$f_k(\lambda_k) = |\lambda_k| \cdot \big(|a_{1k}| + |a_{2k}| + \ldots + \left|a_{(k-1)k}\right| + \left|a_{(k+1)k}\right| + \ldots + |a_{nk}|\big) + \\ + |1 - \lambda_k a_{kk}| = |\lambda_k| \cdot A_k + |1 - \lambda_k a_{kk}|\,,$$

где

$$A_k = \left(|a_{1k}| + |a_{2k}| + \ldots + \left|a_{(k-1)k}\right| + \left|a_{(k+1)k}\right| + \ldots + |a_{nk}|\right).$$

Если $0 < \lambda_k < \frac{1}{a_{kk}}$, то $\lambda_k a_{kk} < 1$ и поэтому $1 - \lambda_k a_{kk} = |1 - \lambda_k a_{kk}|$. Таким образом,

$$f_k(\lambda_k) = \lambda_k A_k + 1 - \lambda_k a_{kk} = 1 - \lambda_k(a_{kk} - A_k)$$

при всех $\lambda_k \in \left(0, \frac{1}{a_{kk}}\right)$.

Поскольку матрица A имеет диагональное преобладание и положительные диагональные элементы, то $a_{kk} > A_k$. Полагая

$$\gamma_k = \min\left(\frac{1}{a_{kk}}, \frac{1}{a_{kk} - A_k}\right),$$

получаем, что при всех $\lambda_k \in (0, \gamma_k)$ имеет место неравенство $0 < f_k(\lambda_k) < 1$. Если теперь положить $\gamma = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \gamma_k > 0$, тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ и произвольного $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство

$$0 < f_k(\lambda) < 1.$$

Таким образом, в случае, когда матрица Λ имеет одинаковые диагональные элементы $\lambda_k = \lambda$, где $\lambda \in (0, \gamma)$, для матрицы матрица $U^* = I - A\Lambda = I - \lambda A = U$ имеет место оценка

$$\|U^*\|_{II} = \|U\|_{II} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(\lambda) < 1.$$

□

Доказанная теорема позволяет оценить норму обратной матрицы для некоторой матрицы эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений, а поэтому оценить и точность приближенного решения. Кроме того, на основании теоремы 26 можно получить приближенное решение с заранее заданной точностью (точнее, с точностью не меньшей, чем заранее заданная). В самом деле, используя универсальный комбинированный метод решения системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ (см. 5.5.), можно построить приближения D_m^* для обратной матрицы A^{-1}, которые очень быстро сходятся к A^{-1} при $m \to \infty$. Рассмотрим эквивалентную систему $D_m^* Ax = D_m^* b = b^*$, матрица $D_m^* A$ этой системы сходится к единичной матрицы, поэтому при некотором натуральном m матрица $B^* = D_m^* A$ будет иметь положительные диагональные элементы и диагональное преобладание, поэтому для матрицы B^* можно применить заключения теоремы (26) и построить матрицу $U = I - \lambda B^*$, у которой вторая норма $\|U\|_{II}$ меньше единицы. В отличии от евклидовой нормы вторую норму $\|U\|_{II}$ можно легко и точно вычислить по формуле (5.32). Наличие величины $\|U\|_{II}$ позволяет оценить вторую норму обратной матрицы $(B^*)^{-1}$, а поэтому и точность приближенного решения $\widetilde{x}$ по формуле (5.31) в метрике пространства $l_1^{(n)}$, а значит и в метрике евклидового пространства $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении приближенного решения с заранее заданной точностью. Прежде всего отметим, что решение этой проблемы необходимо для построения почти решения операторного уравнения $Ax = y$, $x \in E, y \in H$ (см. параграф 5.1.). Действительно, если в обозначения параграфа 5.1. для точного решения $x_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^* e_k$ системы (5.2), образующего почти решение уравнения (5.1), можно вычислить приближенное решение $\widetilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{\beta}_k e_k$ с заранее заданной точностью $\delta_n > 0$, т.е. $\|\widetilde{x}_n - x_n\|_E$ то в случае, когда последовательность $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, элементы $\widetilde{x}_n$ также являются почти решением уравнения (5.1). В самом деле

$$0 \leqslant \|A(\widetilde{x}_n) - y\|_H = \|A(\widetilde{x}_n) - A(x_n) + A(x_n) - y\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \|A\| \cdot \|\widetilde{x}_n - x_n\|_E + \|A(x_n) - y\|_H \leqslant \|A\| \cdot \delta_n + \|A(x_n) - y\|_H \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для вычисления приближенного решения системы линейных алгебраических уравнений у нас имеются все необходимые результаты и математический аппарат. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число; покажем, что можно построить приближенное решение $\widetilde{x}$ системы $Ax = b$ так, что ошибка, для этого приближенного решения $\widetilde{x}$, не превосходила ε: $\|x - \widetilde{x}\| \leqslant \varepsilon$. Как было указано выше, используя универсальный комбинированный метод, можно получить эквивалентную систему $B^*x = D_m^* Ax = D_m^* b = b^*$ так, что матрица этой системы будет иметь положительные диагональные элементы и диагональное преобладание. Следовательно можно построить матрицу $U = I - \lambda B^*$, для которой вторая норма $\|U\|_{II} < 1$, а значит можно по невязке оценить точность приближенного решения x_m, полученного с помощью универсального комбинированного метода, по формуле (5.26). Если ошибка приближенного решения x_m не превосходит ε, то наша задача решена; в противном случае следует увеличить число m итераций для вычисления и исправления элементов обратной матрицы. Поскольку x_m сходится к точному решению x с высокой скоростью, то для систем, возникающих при разумных постановках прикладных задач, начиная с некоторого натурального m, не превышающего вычислительные возможности компьютера, ошибка $\|x - x_m\|_E$ приближенного решения будет меньше ε. Это означает, что проблема вычисления приближенного решения с гарантированной точностью будет решена. Отметим, в заключение, что гарантированная точность получается в случае, когда матрица B^* эквивалентной системы удовлетворяет условиям теоремы 26, однако такая точность не всегда может удовлетворить заказчика.

Перейдем теперь к исследованию вопроса нормирования базисных векторов системы, о которой речь шла в этом разделе. Во многих случаях эта процедура приводит к улучшению точности приближенного решения, если, конечно, соответствующие системы решать каким-либо одним приближенным методом. Таблицы 2 и 3 очень наглядно демонстрируют этот факт.

Табл.2 Решение системы линейных алгебраических уравнений для матрицы, составленной из первых $35^2 = 1225$ простых чисел (матрица 35×35) методом сопряженных градиентов (100 000 итераций) без нормирования базисных векторов системы. Точное решение системы — вектор $x = (1, 1, \dots, 1)$.

$x_1 = 1,213$	$x_2 = 1,077$	$x_3 = 0,947$	$x_4 = 0,928$	$x_5 = 1,029$
$x_6 = 1,006$	$x_7 = 0,932$	$x_8 = 0,993$	$x_9 = 1,066$	$x_{10} = 0,932$
$x_{11} = 1,117$	$x_{12} = 0,802$	$x_{13} = 0,997$	$x_{14} = 0,962$	$x_{15} = 0,777$
$x_{16} = 1,132$	$x_{17} = 0,951$	$x_{18} = 1,018$	$x_{19} = 0,998$	$x_{20} = 1,144$
$x_{21} = 0,999$	$x_{22} = 0,989$	$x_{23} = 0,938$	$x_{24} = 1,143$	$x_{25} = 1,006$
$x_{26} = 0,981$	$x_{27} = 0,960$	$x_{28} = 0,959$	$x_{29} = 0,982$	$x_{30} = 1,059$
$x_{31} = 1,039$	$x_{32} = 0,990$	$x_{33} = 1,002$	$x_{34} = 0,949$	$x_{35} = 1,033$

Табл.3 Решение системы линейных алгебраических уравнений для матрицы, составленной из первых $35^2 = 1225$ простых чисел (матрица 35×35) методом сопряженных градиентов (100 000 итераций) при нормировке базисных векторов системы. Точное решение системы — вектор $x = (1, 1, \dots, 1)$.

$x_1 = 0,9995$	$x_2 = 0,9998$	$x_3 = 1,0001$	$x_4 = 1,0002$	$x_5 = 0,9999$
$x_6 = 1,0000$	$x_7 = 1,0001$	$x_8 = 1,0000$	$x_9 = 0,9999$	$x_{10} = 1,0002$
$x_{11} = 0,9998$	$x_{12} = 1,0004$	$x_{13} = 1,0000$	$x_{14} = 1,0001$	$x_{15} = 1,0005$
$x_{16} = 0,9997$	$x_{17} = 1,0001$	$x_{18} = 1,0000$	$x_{19} = 1,0000$	$x_{20} = 0,9997$
$x_{21} = 1,0000$	$x_{22} = 1,0000$	$x_{23} = 1,0001$	$x_{24} = 0,9997$	$x_{25} = 1,0000$
$x_{26} = 1,0001$	$x_{27} = 1,0001$	$x_{28} = 1,0001$	$x_{29} = 1,0000$	$x_{30} = 0,9999$
$x_{31} = 0,9999$	$x_{32} = 1,0000$	$x_{33} = 1,0000$	$x_{34} = 1,0001$	$x_{35} = 0,9999$

5.8. Характеризация классического решения с помощью ряда Неймана в множестве обобщенных решений.

Рассмотрим операторное уравнений

$$A(x) = y, \tag{5.33}$$

где A — вполне непрерывный инъективный линейный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $x, y \in H$, y — известный элемент из H, а x — неизвестное решение уравнений (5.33). Используя преобразования Гаусса, т.е. применяя к левой и правой частям уравнения (5.33) сопряженный оператор A^*, получим эквивалентное операторное уравнение $A^*A(x) = A^*(y) = y^*$, в котором оператор $B = A^*A$ будет инъективным симметричным положительно определенным и вполне непрерывным. Про оператор удовлетворяющий такому набору условий будем говорить, что он удовлетворяет условиям α). Сделанное замечание позволяет без ограничения общности считать, что оператор A исходного уравнения (5.33) кроме указанных условий является симметричным и положительно определенным, т.е. удовлетворяет условиям α).

При исследовании уравнения (5.33) естественным образом возникает вопрос, для каких правых частей $y \in H$ существует классическое решение уравнения (5.33), а для каких — обобщенное решение? Ответ на этот вопрос можно получить, используя метод рядов Неймана, изложенный в параграфе 5.2. Как было показано в этом параграфе, оператор $U = I - \mu A$, где $\mu = \frac{1}{\|A\|}$ и $\|A\|$ — норма оператора A в евклидовом пространстве R^n. В случае, когда A удовлетворяет условиям α), имеет норму меньше единицы: $\|U\| < 1$. К сожалению, как будет доказано в дальнейшем, этот факт не имеет место, если H — бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство. Точнее говоря, если оператор A в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H удовлетворяет условиям α), то при любом неотрицательном μ имеет место неравенство $\|U\| = \|I - \mu A\| > 1$. Отсюда следует, что мы не можем гарантировать сходимость операторного ряда Неймана

$$A_\mu^{-1} = (I - U)^{-1} = I + U + U^2 + \ldots + U^n + \ldots \tag{5.34}$$

Этот ряд, как правило, будет расходящимся, поэтому формула (5.34) для обратного оператора A_μ^{-1} является некорректной. Однако, если вместо операторного ряда (5.34) рассмотреть ряд

$$y + Uy + U^2y + \ldots + U^ny + \ldots \tag{5.35}$$

в гильбертовом пространстве H при фиксированном элементе $y \in H$, то можно совершенно точно указать, когда ряд (5.35) сходится или расходится. С этой целью определим структуру оператора U и его норму. Как известно [66], самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, можно представить в виде

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \, (x, e_i) \, e_i, \tag{5.36}$$

где e_i — ортонормированный базис, состоящий из собственных элементов оператора A, соответствующих ненулевым собственным числам $\lambda_i \neq 0$ (если оператор A — положительно определенный, то все $\lambda_i > 0$). Отсюда следует, что оператор U имеет вид

$$U(x) = I(x) - \mu A(x) = x - \sum_{i=1}^{\infty} \mu\lambda_i\,(x, e_i)\,e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\,(x, e_i)\,e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \mu\lambda_i\,(x, e_i)\,e_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_i)\,(x, e_i)\,e_i,$$

поэтому числа $\widetilde{\lambda}_i = 1 - \mu\lambda_i$ будут собственными числами оператора U, а e_i — соответствующие им собственные элементы U. Действительно, если x — собственный элемент оператора A, а λ — его собственное число, то x является собственным элементом оператора U с собственным числом $\bar{\lambda} = 1 - \mu\lambda$; если же, наоборот, x — собственный элемент оператора U с собственным числом $\bar{\lambda}$, то x будет собственным элементом оператора A, а отвечающее ему собственное значение будет равно $\lambda = \frac{1-\bar{\lambda}}{\mu}$.

Оценим норму оператора U. Поскольку U является самосопряженным оператором, то в силу формулы на стр. 190 книги [66] получим

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ux, x)| = \sup_{\|x\|=1} \left| \left(\sum_{i=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_i)\,(x, e_i)e_i, \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)e_k \right) \right| =$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_i)\,(x, e_i)^2 \right| \geqslant 1, \tag{5.37}$$

так как $\lambda_i \to 0$ при $i \to \infty$. С другой стороны, в силу хорошо известных результатов (см., например, [66]) при $\mu = \frac{1}{\|A\|}$ имеем, что $0 \leqslant 1 - \mu\lambda_i \leqslant 1$, поскольку $\lambda_i \geqslant 0$ и $\lambda_i \leqslant \|A\|$ (напомним, что A — положительно определенный самосопряженный оператор). Следовательно

$$\|U\| = \sup_{\|x\|=1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \mu\lambda_i)\,(x, e_i)^2 \right| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i)^2 = 1.$$

Откуда, с учетом неравенства (5.37) вытекает, что $\|U\| = 1$.

Теорема 27. *Пусть A — инъективный линейный положительно определенный самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и $U = I - \frac{1}{\|A\|}A$, тогда операторное уравнений*

$$Ax = y \tag{5.38}$$

имеет классическое решение $x \in H$ в том и только в том случае, когда ряд Неймана

$$y + U(y) + U^2(y) + \ldots + U^k(y) + \ldots \tag{5.39}$$

сходится в гильбертовом пространстве H.

Доказательство. Установим достаточность сформулированного условия. Положим $y_1 = \mu y$, где $\mu = \frac{1}{\|A\|}$ и предположим, что для элемента y ряд (5.39) сходится. Покажем, что сумма ряда

$$x = y_1 + U(y_1) + U^2(y_1) + \ldots + U^k(y_1) + \ldots$$

является классическим решением операторного уравнения $Ax = y$. Имеем

$$A_\mu(x) = \mu A(x) = \lim_{n\to\infty} \mu A\Big(\sum_{k=0}^{n} U^k y_1\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (\mu A) U^k y_1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (I-U)U^k y_1 = \lim_{n\to\infty} \left(I + U + \ldots + U^n - U - U^2 - \ldots - U^{n+1}\right) y_1 =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(I - U^{n+1}\right) y_1 = \lim_{n\to\infty} y_1 - \lim_{n\to\infty} U^{n+1} y_1 = y_1 = \mu y,$$

поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} U^{n+1} y_1 = 0$. Таким образом, $A(x) = y$ и это означает, что элемент x является классическим решением уравнения (5.38).

Перейдем к доказательству необходимости условия сходимости ряда (5.39). Итак, пусть x — классическое решение операторного уравнения (5.38). Обозначим через $S_n(y)$ частичную сумму ряда (5.39)

$$S_n(y) = y + Uy + \ldots + U^n y.$$

Тогда

$$S_n(y) = A(x) + UA(x) + \ldots + U^n A(x),$$

и поэтому

$$S_n(y_1) = \mu S_n(y) = \mu A(x) + U(\mu A)(x) + U^2(\mu A)(x) + \ldots + U^n(\mu A)(x) =$$
$$= (I-U)(x) + U(I-U)(x) + U^2(I-U)(x) + \ldots + U^n(I-U)(x) =$$
$$=$$
$$I(x) - U(x) + U(x) - U^2(x) + \ldots + U^n(x) - U^{n+1}(x) = x - U^{n+1}(x).$$

Таким образом, $\mu S_n(y) = x - U^{n+1}(x)$.

Покажем, что $U^{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$ (отсюда будет следовать, что $\mu S_n(y) \to x$ при $n \to \infty$, то есть будет следовать сходимость ряда (5.39) к элементу $\frac{1}{\mu}x$). Используя метод математической индукции нетрудно показать, что n-ая степень оператора U имеет вид

$$U^n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\|A\|}\right)^n (x, e_i) e_i.$$

Положим $\nu_i = 1 - \frac{\lambda_i}{\|A\|}$, тогда очевидно, что $0 \leqslant \nu_i < 1$ и

$$U^n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^n (x, e_i) e_i.$$

Пусть x — произвольный элемент из гильбертова пространства H и $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i,$$

то существует такое натуральное число N, что

$$\Big\| \sum_{i=N+1}^{\infty} (x, e_i) e_i \Big\| = \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \Big)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, так как $\nu_i \in [0, 1)$, то можно выбрать такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} \nu_i^n (x, e_i) e_i \Big\| = \Big(\sum_{i=1}^{N} \nu_i^n |(x, e_i)|^2 \Big)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при фиксированном N. Таким образом, имеем

$$\|U^n(x)\| = \Big\| \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i^n (x, e_i) e_i \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{N} \nu_i^n (x, e_i) e_i \Big\| + \Big\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \nu_i^n (x, e_i) e_i \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} \nu_i^{2n} |(x, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \Big(\sum_{i=N+1}^{\infty} |(x, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом доказано, что последовательность операторов U^n сходится к нулю в топологии поточечной сходимости. □

Замечание 25. Теорему 27 можно интерпретировать как критерий принадлежности правой части y операторного уравнения $A(x) = y$ множеству значений $R(A)$ оператора A, а именно: $y \in R(A)$ тогда и только тогда, когда ряд Неймана (5.39), порожденный элементом y, сходится в гильбертовом пространстве H. Следовательно, если для данного элемента $y \in H$ ряд Неймана (5.39) расходится, то операторное уравнение $A(x) = y$ имеет лишь обобщенное решение; справедливо и обратное утверждение.

Замечание 26. Легко видеть, что при доказательстве достаточности теоремы 27 использовалось лишь свойство линейности и непрерывности оператора A.

Отметим, что, используя спектральную теорию линейных операторов, описанное выше доказательство теоремы 27 (как впрочем и сама теорема) может быть упрощено и обобщено на случай банахова пространства. Приведем соответствующие рассуждения.

Пусть E — банахово пространство, $A : E \to E$ — линейный непрерывный оператор, определенный на всем пространстве E. Рассмотрим операторное уравнение

$$x - Ax = y, \tag{5.40}$$

где y — известный элемент из E.

Для решения уравнения (5.40) применим описанный выше приближенный метод рядов Неймана

$$x_n = Ax_{n-1} + y, \tag{5.41}$$

где $x_0 \in E$ — заданное начальное приближение. Несложно понять, что порожденную итерационной процедурой (5.41) последовательность x_n можно представить в виде

$$x_n = y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y + A^n x_0. \tag{5.42}$$

Покажем, что для определенного ниже класса операторов существует простая связь между классической разрешимостью уравнения (5.40) и сходимостью последовательности x_n, порожденной равенствами (5.41).

Определение 16. Оператор A будем называть *"правильным"*, если для произвольного $x \in E$ последовательность $\{A^n x\}$ сходится в пространстве E.

Для "правильного" в пространстве E оператора A определим следующий линейный оператор B:

$$Bx = \lim_{n\to\infty} A^n x, \qquad x \in E.$$

Из теоремы Банаха-Штейнгауза следует ограниченность оператора B. Кроме того, для произвольных элементов $y^* \in E^*$ и $x \in E$ имеет место соотношение

$$\langle (A^*)^n y^*, x\rangle = \langle y^*, A^n x\rangle \to \langle y^*, Bx\rangle = \langle B^* y^*, x\rangle, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, последовательность $\{(A^*)^n y^*\}$ сходится к B^*y^* в топологии $\sigma(E^*, E)$. Используя этот факт и условие сильной сходимости из определения "правильности"оператора A, получаем

$$\left\langle y^*, A^{2n}x\right\rangle = \langle (A^*)^n y^*, A^n x\rangle \to \langle B^* y^*, Bx\rangle = \left\langle y^*, B^2 x\right\rangle, \quad n \to \infty.$$

Из этого свойства следует сходимость последовательности $\{A^{2n}x\}$ к B^2x в топологии $\sigma(E, E^*)$. Таким образом, доказано, что $B^2 = B$. Кроме того, поскольку $BAx = \lim\limits_{n\to\infty} A^{n+1}x = Bx = ABx$, то $B = AB = BA$. Отсюда следует, что $R(B) \subset N(I - A)$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 28. *Пусть A — "правильный" линейный непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Тогда $y \in R(I - A)$ в том и только в том случае, когда для произвольного $x_0 \in E$ последовательность* (5.42) *сходится в банаховом пространстве E к решению уравнения* (5.40).

Доказательство. Пусть для $y \in E$ последовательность (5.42) сходиться в E к элементу $x \in E$. Покажем, что x является решением уравнения (5.40) с правой частью y, т.е. $y \in R(I - A)$. Действительно, поскольку

$$Bx_n = B\left(y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y + A^n x_0\right) = nBy + Bx_0,$$

то

$$By = 0.$$

Следовательно, имеют место соотношения

$$(I - A)(y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y) = y - A^n y \to y - By = y, \quad n \to \infty.$$

Далее имеем, что

$$y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y \to x - Bx_0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, установлено равенство $(I - A)(x - Bx_0) = y$, но с другой сторон, учитывая условие $R(B) \subset N(I - A)$, получаем, что $(I - A)(x - Bx_0) = (I - A)x$. Значит имеют место равенства

$$(I - A)x = (I - A)(x - Bx_0) = y.$$

Предположим теперь, что $y \in R(I - A)$. Тогда для некоторого $x \in E$ имеем, что $y = x - Ax$. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in E$ и рассмотрим последовательность

$$x_n = y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y + A^n x_0, \quad n \geqslant 1.$$

Откуда легко получаем равенство

$$y + Ay + A^2y + \ldots + A^{n-1}y = x - A^n x.$$

Поскольку $A^n x \to Bx$ и $A^n x_0 \to Bx_0$ при $n \to \infty$, то

$$x_n \to x - Bx + Bx_0, \quad n \to \infty.$$

Кроме того несложно установить, что $x - Bx + Bx_0$ — решение уравнения (5.40). Действительно,

$$(I - A)(x - Bx + Bx_0) = x - Ax + (I - A)B(x_0 - x) = y,$$

поскольку $R(B) \subset N(I - A)$. □

Отметим, что очень просто описываются "правильные" самосопряженные и неотрицательно определенные операторы, действующие в гильбертовом пространстве.

Утверждение 1. *Пусть A — самосопряженный и неотрицательно определенный линейный непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A "правильный" в том и только в том случае, когда $\|A\| \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\|A\| \leqslant 1$. Тогда

$$A = \int_0^1 \lambda \, dE_\lambda.$$

Покажем, что для произвольного $x \in H$ последовательность

$$A^n x = \int_0^1 \lambda^n \, dE_\lambda \, x$$

сходиться в пространстве H при $n \to \infty$.

Обозначим через H_1 собственное подпространство оператора A, отвечающие собственному значению $\lambda = 1$ (возможно, что $H_1 = \{\theta\}$), через H_2^δ подпространство векторов вида

$$x = \int_0^{1-\delta} dE_\lambda \, x.$$

Наконец, пусть H_3^δ — ортогональное дополнение к $H_1 \oplus H_2^\delta$. Если через P_1, P_2 и P_3 обозначить ортогональные проекторы на подпространства H_1, H_2^δ и H_3^δ, соответственно, то имеет место равенство

$$A^n x = A^n P_1 x + A^n P_2 x + A^n P_3 x = P_1 x + A^n P_2 x + A^n P_3 x.$$

Оценим второе и третье слагаемые

$$\|A^n P_2 x\| = \| \int_0^{1-\delta} \lambda^n \, dE_\lambda \, P_2 x\| \leqslant (1-\delta)^n \|P_2 x\|,$$
$$\|A^n P_3 x\| \leqslant \|A^{n-1} P_3 x\| \leqslant \ldots \leqslant \|P_3 x\|.$$

Пусть ε — произвольно положительное число. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы имело место неравенство $\|P_3 x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, для достаточно больших n, имеем

$$\|A^n (P_2 x + P_3 x)\| \leqslant (1-\delta)^n \|P_2 x\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. последовательность $A^n x$ сходится к элементу $P_1 x$.

Обратно, пусть оператор A "правильный". Предположим, что $\|A\| > 1$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, \|A\| - 1)$ рассмотрим подпространство H_ε элементов вида

$$x = \int_{1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1+\varepsilon} dE_\lambda\, x.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in H_\varepsilon$. Для последовательности $\{A^n x\}$ имеет место оценка

$$\|A^n x\| = \left\| \int_{1+\frac{\varepsilon}{2}}^{1+\varepsilon} \lambda^n \, dE_\lambda x \right\| \geqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \|x\| \to +\infty,$$

что противоречит "правильности" оператора A. □

Теорема 29. *Пусть A — самосопряженный неотрицательно определенный линейный непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и $U = I - \frac{1}{\|A\|}A$. Тогда $y \in R(A)$ в том и только в том случае, когда для произвольного $x_0 \in H$ последовательность*

$$x_n = y + Uy + U^2 y + \ldots + U^{n-1} y + U^n x_0$$

сходится в пространстве H.

Доказательство. Оператор U "правильный" и $R(I - U) = R(A)$. □