Глава 1

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПОНЯТИЯ и ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть E — **линейное** (также говорят **векторное**) пространство, рассматриваемое над полем $\mathbb{R}$, то есть множество E на котором введены операции сложения любых двух элементов x, y из E (обозначаем $x + y$) и умножения любого элемента x множества E на произвольный элемент λ поля $\mathbb{R}$ (обозначаем λx), удовлетворяющие следующим естественным условиям:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

2) $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

3) существует $\theta \in E$, что для всех $x \in E$ выполняется $0x = \theta$ (существование нейтрального элемента для сложения);

4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивность);

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность);

6) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (ассоциативность умножения);

7) $1x = x$ (существование нейтрального элемента для умножения).

В линейном пространстве E под разностью $x - y$ понимают выражение $x + (-1)y$.

Отображение $f : E \to \mathbb{R}$ называют **линейным функционалом** на E (предполагается, что E — линейное пространство), если выполняются следующие условия:

1 (свойство аддитивности). для всех $x, y \in E$ имеет место равенство

$$f(x + y) = f(x) + f(y);$$

2 (свойство однородности). для всех $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$ имеет место равенство

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Алгебраически сопряженным к линейному пространством к E называют пространство E', состоящее из всех линейных функционалов f, определенных на пространстве E. Множество E' образует линейное пространство, если под $f + g$ и λf понимать функционалы, заданные следующим естественным способом:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ для всех $f, g \in E'$, $x \in E$,

2) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ для всех f, $\lambda \in E'$, $x \in E$.

Аналогично определяется **второе алгебраически сопряженное** пространство $E'' = (E')'$ и так далее. Каждый элемент $x \in E$ однозначно задает некоторый элемент пространства E'' — линейный функционал $L_x \in E''$ — по следующему правилу $L_x(f) = f(x)$ для всех $f \in E'$. Таким образом, имеет смысл говорить о **вложении** $E \subset E''$. Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ называют **выпуклым**, если для произвольных $x, y \in E$ и произвольного действительного числа $\lambda \in [0, 1]$ выполняется неравенство $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) y)$.

Рассмотрим два линейных пространства E, F, на декартовом произведении которых задана **билинейная форма** $\langle x, y\rangle$, $x \in E, y \in F$, то есть функция двух переменных линейная (аддитивная и однородная) по каждой переменной в отдельности. Говорят, что линейные пространства E, F находятся в **двойственности** относительно этой билинейной формы (также говорят, что (E, F) образуют **дуальную пару**), если

1) для всех $x \in E$ $(x \neq 0)$ существует такой $y \in F$, что $\langle x, y\rangle \neq 0$;

2) для всех $y \in F$ $(y \neq 0)$ существует такой $x \in F$, что $\langle x, y\rangle \neq 0$.

Если E — линейное пространство, E' — алгебраически сопряженное, то выражение $f(x) = \langle f, x\rangle$, где $f \in E'$, $x \in E$, задает билинейную форму над E' и E. Можно доказать, что пространства E' и E находятся в двойственности.

Если линейные пространства E и F находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$, где $x \in E, y \in F$, то каждый элемент $y \in F$ можно отождествить с некоторым линейным функционалом $f \in E'$ посредством равенства $f(x) = \langle x, y\rangle$ для всех $x \in E$. Таким образом, всегда $F \subset E'$.

Пусть линейные пространства E и F находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$, $x \in E, y \in F$, и пусть M — подмножество E. **Полярой** множества M (в этой двойственности) называют множество

$$M^{\circ} = \{y \in F \mid |\langle x, y\rangle| \leqslant 1\}.$$

Пусть линейные пространства E и F находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$, $x{\in}E, y{\in}F$, и пусть M — подмножество E. Говорят, что множество M является **тотальным** в E, если линейные множества M и F также находятся в двойственности (относительно $\langle x, y\rangle$).

Оператор $\mathcal{L}$, действующий из линейного пространствах E в линейное пространство F, называют линейным, если он удовлетворяет условиям:

1 (свойство аддитивности) $\mathcal{L}(x+y) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$ для всех $x, y \in E$,

2 (свойство однородности) $\mathcal{L}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{L}x)$ для всех $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Алгебраически сопряженным к линейному оператору $\mathcal{L} : E \to F$ называют оператор $\mathcal{L}' : F' \to E'$, действующий по правилу

$$(\mathcal{L}'\varphi)(x) = \varphi(\mathcal{L}x) \quad \text{для всех } x \in E, \varphi \in F'.$$

Таким образом, $\mathcal{L}'\varphi = \varphi \circ \mathcal{L}$.

Пусть в линейном пространстве E введена топология $\mathcal{T}$ (совокупность открытых подмножеств O множества E), превращающая E в линейное топологическое пространство (см. [66]). Множество $M_x \subset E$ называют **окрестностью точки** $x \in E$, если существует такое открытое множество $O \in \mathcal{T}$, что $x \in O \subset M_x$.

Предположим, что на множестве E задано две топологии $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$. Говорят, что топология $\mathcal{T}_1$ **сильнее топологии** $\mathcal{T}_2$ (обозначают $\mathcal{T}_2{\subset}\mathcal{T}_1$), если для любого $O_2 {\in} \mathcal{T}_2$ существует такое $O_1 {\in} \mathcal{T}_1$, что $O_1 \subset O_2$. Если одна топология сильнее другой, то говорят, что эти топологии **сравнимы** между собой.

Пусть $\mathcal{L}$ — оператор, действующий из линейного топологического пространства E в линейное топологическое пространство F. Оператор $\mathcal{L}$ называют **непрерывным**, если для любого открытого множества $O_F \subset F$ существует такое открытое множество $O_E{\subset}E$, что $\mathcal{L}(O_E){\subset}O_F$. В частности, если $F = \mathbb{R}$, то говорят о **непрерывном функционале**. Множество линейных непрерывных на E функционалов образует пространство E^* называемое **сопряженным**.

Подмножество $M \subset E$ называют **ограниченным** в линейном топологическом пространстве E, если для любой последовательности элементов $x_n \in M$ и любой числовой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, последовательность $\lambda_n x_n$ стремится к нулю.

Пусть E — линейное множество и $F \subset E'$ — тотальное подмножество. Важным примером линейного топологического пространства является пространство E со слабой топологией $\sigma(E, F)$. Через $O_{\varepsilon, f_1, f_2, \ldots, f_n}$, где $f_i \in F$, $\varepsilon > 0$, обозначим множество точек $x \in E$ таких, что для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется неравенство $|f_i(x)| < \varepsilon$. Топология $\sigma(E, F)$ задается окрестностями нуля следующим образом. **Окрестностью нуля** называют всякое множество, содержащее $O_{\varepsilon,f_1,f_2,\dots,f_n}$. **Окрестности произвольной точки** $x \neq 0$ определяются как сдвиг окрестности нуля на элемент x, то есть произвольная окрестность V_x точки x имеет вид $V_x = V_0 + x$, где V_0 — некоторая окрестность нуля. В таком линейном топологическом пространстве линейные функционалы $f \in F$ являются непрерывными и только они, то есть $E^* = F$.

Пусть E и F — линейные нормированные пространства и $\mathcal{L}$ — линейный непрерывный оператор, действующий из E в F. Если $\varphi(f)$ — линейный непрерывный функционал на F ($\varphi \in F^*$), то функционал $l(x) = \varphi(\mathcal{L}x)$ будет линейным непрерывным функционалом на E ($l \in E^*$). Таким образом, построено соответствие $\mathcal{L}^* : F^* \ni \varphi \mapsto l \in E^*$, называемое **сопряженным оператором**. Сопряженные операторы рассматривают и в случае, когда E, F — линейные топологические пространства (см., например, [56]). Напомним также, что **субдифференциалом** выпуклого функционала $f : E \to \mathbb{R}$ в точке $x_0 \in E$ называют множество $\partial f(x_0) \subset E^*$ линейных непрерывных функционалов $x_0^* \in E^*$ таких, что $f(x) - f(x_0) \geqslant x_0^*(x - x_0)$ для всех $x \in E$. Если E — банахово пространство и функционал f непрерывный в точке $x_0 \in E$, то $\partial f(x_0)$ — непустое выпуклое и компактное в топологии $\sigma(E^*, E)$ множество [68].

При исследовании обобщенных решений операторных уравнений большую роль играет теория вложенных и промежуточных банаховых пространств (см. [49]). Напомним основные понятия этой теории. Пусть E и F — два множества. Оператор $\mathcal{L} : E \to F$ называют **инъективным**, если $\mathcal{L}x \neq \mathcal{L}y$ при $x \neq y$; **сюръективным**, если $\mathcal{L}(E) = F$, и, наконец, **биективным**, если он одновременно инъективен и сюръективен.

Говорят, что линейное нормированное пространство E **вложено** в линейное нормированное пространство F с помощью оператора вложения j_{EF}, если j_{EF} — линейный ограниченный инъективный оператор, область определения которого совпадает со всем пространством E. Пусть пространство E вложено в G, а пространство G, в свою очередь, само вложено в пространство F с помощью соответствующих операторов вложений. Пространство G называют **промежуточным** между E и F, если коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j_{EG}} & G \\ \Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_{GF}} \\ E & \xrightarrow{j_{EF}} & F \end{array}$$

Понятиям вложенных и промежуточных пространств можно дать другую, более простую, интерпретацию. Пусть пространство E вложено в F. Рассмотрим образ $j_{EF}(E) \subset F$ с нормой $\|y\|_0 = \|x\|_E$, где $y = j_{EF}(x)$. Очевидно, что пространства $(E, \|\cdot\|)$ и $(j_{EF}(E), \|\cdot\|_0)$ являются изометричными.

Поэтому элементы множеств E и $j_{EF}(E)$ можно отождествить и считать, что E является подпространством F. Поскольку оператор j_{EF} ограничен, то существует некоторое положительное число C, независящее от y, что неравенство $\|y\|_F \leqslant C\|y\|_0$ выполняется при всех $y \in j_{EF}$. Следовательно, определение вложенных пространств можно сформулировать так: линейное нормированное пространство E вложено в F, если E является подпространством F и существует $C > 0$, для которого $\|x\|_F \leqslant C\|x\|_E$, где x — произвольный элемент из E.

Понятие промежуточного пространства интерпретируется следующим образом: пространство G промежуточно между E и F, если $E \subset G \subset F$ и выполняются неравенства $\|x\|_G \leqslant C_1\|x\|_E$ для всех $x \in E$, $\|x\|_F \leqslant C_2\|x\|_G$ для всех $x \in G$, где константы C_1, C_2 не зависят от x.

Говорят, что пространство E **плотно вложено** в F, если множество E, рассматриваемое как подмножество пространства F, плотно в F, естественно относительно нормы $\|\cdot\|_F$. Если E плотно вложено в F, то сужение на множество E всякого линейного непрерывного функционала $f \in F^*$ порождает непрерывный линейный функционал на E. Действительно, учитывая неравенство $\|x\|_F \leqslant C\|x\|_E$, имеем

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E} \leqslant C \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_F} \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\|x\|_F \leqslant C} \frac{|f(x)|}{\|x\|_F} = C \sup_{\|x\|_F \leqslant 1} \frac{|f(x)|}{\|x\|_F} = C\|f\|_{F^*}.$$

Инъективность указанного отображения $j_{F^*E^*}$, которое функционалу $f \in F^*$ ставит в соответствие функционал из E^*, следует из плотности вложения E в F. Таким образом, F^* вложено в E^* и $\|f\|_{E^*} \leqslant C\|f\|_{F^*}$. Легко видеть, что из плотности вложения $E \subset F$ будет следовать и плотность вложения F^* в E^*, если считать, что пространство E^* наделено топологией $\sigma(E^*, E)$; плотного же по норме E^* вложения $F^* \subset E^*$ может и не быть. Приведем соответствующий пример. Пусть $E = l_1$, $F = c_0$, тогда E плотно вложено в F (причем константа вложения $C = 1$). Однако множество $F^* = l_1$ не является плотным в пространстве $E^* = l_\infty$, поскольку элемент $e = (1, 1, \ldots) \in l_\infty$ отстоит от l_1 на расстоянии 1.

Рассмотрим некоторые примеры вложений и промежуточных банаховых пространств. Банахово пространство $E_1 = C^1(0,1)$ вложено в $E_0 = C(0,1)$ с помощью оператора естественного вложения: если $x(t) \in C^1(0,1)$, то $j_{E_1E_0}(x(t)) = x(t)$. Действительно,

$$\|x\|_{E_0} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x'(t)| = \|x\|_{E_1}.$$

Отметим также, что $C^1(0,1)$ вложено в $C(0,1)$ плотно, поскольку, в силу известной теоремы К.Вейерштрасса, всякую непрерывную функцию можно с любой степенью точности приблизить в пространстве $C(0,1)$ алгебраическими полиномами, которые, очевидно, входят в пространство $C^1(0,1)$. Более того, нетрудно доказать, что $C^1(0,1)$ компактно вложено в $C(0,1)$ (компактность вложения E в F означает, что единичный шар $S_1(E)$ пространства E будет относительно компактным множеством в F, т.е. его замыкание в F по норме F компактно в F). В самом деле, если $x(t) \in S(\theta,1)$, где $S(\theta,1)$ — единичный шар в пространстве $C^1(0,1)$, то $|x(t)| + |x'(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in [0,1]$. Откуда вытекают неравенства $|x(t)| \leqslant 1$ и $|x(t) - x(\tau)| \leqslant$ $\leqslant |t - \tau|$ для всех $t, \tau \in [0,1]$. Таким образом, множество, рассматриваемых функций $x(t)$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным в пространстве $C(0,1)$, а значит, в силу известной теоремы Арцела, это множество является относительно компактным в $C(0,1)$.

Другой пример вложения банаховых пространств дают пространства $C(0,1)$ и $L_p(0,1)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Определим оператор вложения j пространства $C(0,1)$ в $L_p(0,1)$, поставив в соответствие непрерывной функции $x(t)$ класс функций $\widetilde{x}(t) \in L_p(0,1)$, отличающихся от $x(t)$ на множестве лебеговой меры нуль; тогда $C(0,1)$ будет вложено в $L_p(0,1)$. В самом деле, j является алгебраическим гомоморфизмом, кроме того

$$\|j(x)\|_{L_p(0,1)} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)| = \|x\|_{C(0,1)}.$$

Плотность множества $C(0,1) \subset L_p(0,1)$ в метрике пространства L_p можно доказать с помощью хорошо известной теоремы Лузина.

Если $p > q$, то пространство $L_p(0,1)$ вложено в $L_q(0,1)$ с помощью тождественного оператора вложения j. Действительно, при $p > q$, в силу неравенства Гельдера, имеет место неравенство

$$\|x\|_{L_q} = \left(\int_0^1 |x(t)|^q dt\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_0^1 |x(t)|^{q \cdot \frac{p}{q}} dt\right)^{\frac{q}{p} \cdot \frac{1}{q}} = \|x\|_{L_p}.$$

Поскольку множество $C(0,1) \subset L_p(0,1) \subset L_q(0,1)$ всюду плотно в любом из пространств L_q, то $L_p(0,1)$ всюду плотно в $L_q(0,1)$. С помощью неравенства Гельдера можно также доказать, что пространство l_p вложено в l_q при $q > p$; плотность вложения l_p в l_q вытекает из того, что линейное многообразие M, состоящее из последовательностей, у которых конечное число элементов отлично от нуля, принадлежит любому l_p и является всюду плотным множеством.

Еще один важный пример вложения банаховых пространств представляет пространство Соболева $W_p^{(l)}(D)$ и пространство $L_p(D)$, где D — ограниченная область в R^n. Пространство $W_p^{(l)}(D)$, состоящее из функций $x(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$, имеющих суммируемые с p-ой степенью обобщенные частные производные в области D до l-того порядка включительно, очевидно, вложено в пространство $L_q(D)$ с помощью оператора естественного вложения. Кроме того,

$$\|x\|_{L_p(D)} = \left(\int_D |x(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_D |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_l=1}^{n} \left(\int_D \left|\frac{\partial^l x}{\partial t_{k_1}\partial t_{k_2}\ldots\partial t_{k_l}}\right|^p dt\right)^{1/p} = \|x\|_{W_p^{(l)}(D)}.$$

Плотность вложения $W_p^{(l)}(D)$ в $L_p(D)$ следует из того, что множество $C^{(l)}(D)$ всех l раз непрерывно дифференцируемых функций в области D будет всюду плотным как в пространстве $W_p^{(l)}(D)$ так и в $L_p(D)$ [12].