– Г-голубчики, – сказал Федор Симеонович ...
– Это же п-проблема Бен Б-бецалеля.
К-калиостро же доказал, что она н-не имеет р-решения.
– Мы сами знаем, что она не имеет решения, – сказал Хунта ...
– Мы хотим знать, как ее решать.
– К-как-то ты странно рассуждаешь, К-кристо ...
К-как же искать решение, к-когда его нет? Б-бессмыслица какая-то.
– Извини, Теодор, но это ты очень странно рассуждаешь.
Бессмыслица – искать решение, если оно и так есть.
Речь идет о том, как поступать с задачей, которая решения не имеет.
Это глубоко принципиальный вопрос ...

А. Стругацкий, Б. Стругацкий. Понедельник начинается в субботу.

Предисловие

В 1900 году на международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал свои 23 проблемы, которые XIX век завещал будущим поколениям математиков. По мнению Д. Гильберта эти проблемы должны были предопределить основные направления дальнейшего развития математической науки. В настоящее время большинство проблем Гильберта успешно решены и хотя в XX столетии возникло много новых математических наук и важных задач, проблемы Гильберта не потеряли своей актуальности, поскольку в них заложены глубокие научные результаты, открытие которых является очень полезным для многих разделов математики.

Среди 23 проблем Гильберта достойное место занимает XX проблема — "общая задача о граничных условиях" (the general problem of boundary values). Американское математическое общество в своем бюллетене формулирует эту проблему следующим образом: "has not every regular variation problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied (say that the functions concerned in these boundary conditions are continuous and have in sections one or more derivatives) and provided also of need be that the notion of a solution shall be suitably extended?" (см. [71] с.470). На русском эта проблема звучит так: "не допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача, если только на данные граничные условия наложены определенные допущения, например, непрерывность или кусочная дифференцируемость до определенного порядка функций, определяющих условия на границах, и если, в случае необходимости, самому решению придать расширенное толкование." [54]

Этот перевод на русский язык осуществлен с оригинального немецкого текста, поэтому он не является "подстрочником" к английскому варианту, который мы процитировали в силу большей распространённости английского языка.

Как бы там ни было, Д. Гильберт ставит проблему о расширении классического понятия решения и эта удивительная прозорливость гениального математика просто поразительна, поскольку в то время не было еще понятия пополнения метрических или линейных нормированных пространств (как, впрочем, и самих этих пространств), которые составляют основу понятия обобщенного решения операторного уравнения. Сама идея обобщенного решения очень проста: предположим, что мы имеем операторное уравнение $A(x) = y$, где A — некоторый непрерывный оператор (линейный или нелинейный), действующий из метрического или банахова пространства E в F. Операторные уравнения охватывают широкие классы дифференциальных уравнений (включая и граничные задачи), интегральных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений и т.д. Во многих практически важных случаях классического решения у операторного уравнений $A(x) = y$ не существует, поскольку правая часть y не принадлежит множеству значений $R(A) \subset F$ оператора A, однако на пространстве E можно ввести более слабую топологию так, что пополнение $\widetilde{E}$ пространства E по этой более слабой топологии становится более широким пространством: $E \subset \widetilde{E}$, а оператор A можно расширить по непрерывности на все пространство $\widetilde{E}$, причем правая часть y принадлежит множеству значений $R(\widetilde{A})$ этого расширенного оператора $\widetilde{A}$. Таким образом, у операторного уравнения $\widetilde{A}(x) = y$ ($x \in \widetilde{E}$, $y \in F$, $\widetilde{A} : \widetilde{E} \to F$) существует классическое решение $\widetilde{x} \in \widetilde{E}$, которое и называют обобщенным решением исходного уравнения $A(x) = y$. Это и есть то расширение понятия решения, о котором писал в своей XX проблеме Д. Гильберт.

С понятием обобщенного решения тесно связано понятие почти решения x_ε операторного уравнения $A(x) = y$; так называют элемент из пространства E, для которого правая часть исходного уравнения $A(x_\varepsilon) = y_\varepsilon$ отличается от y меньше чем на ε: $\rho(y, y_\varepsilon) < \varepsilon$. Отметим, что в некоторых случаях элемент x_ε можно принять за приближенное решение уравнения $A(x) = y$. Если положить $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и рассмотреть последовательность почти решений x_{ε_n}, то можно показать, что в пространстве $\widetilde{E}$ (но не в пространстве E!) последовательность x_{ε_n} сходится к обобщенному решению $\widetilde{x}$. Вычисление почти решений в случае линейного оператора A сводится к проблеме приближенного (или точного) решения системы линейных алгебраических уравнений, поэтому в книге этим вопросам уделяется много внимания и предлагаются различные методы решения этой проблемы.

Наряду с исследованием обобщенных решений в книге изучаются, так называемые, обобщенные экстремальные элементы, которые по своей сущности близки к понятию обобщенного решения. Пусть D — некоторая область в банаховом или метрическом пространстве E и на области D задан непрерывный функционал $f(x)$ ($x \in D$). Как правило, области D в бесконечномерном пространстве являются некомпактными, поэтому экстремальный элемент x^* из D, на котором $f(x)$ достигает своего максимального или минимального значений, может не существовать. Определение такого "обобщенного" экстремального элемента напоминает построение обобщенного решения: на множестве D вводится более слабая топология $\mathcal{T}_D$ таким образом, что пополнение $\widetilde{D}$ множества D по топологии $\mathcal{T}_D$ является компактным топологическим пространством, а функционал f можно расширить на $\widetilde{D}$ по непрерывности так, что в множестве $\widetilde{D}$ будет существовать классический экстремальный элемент x^*, который считается обобщенным экстремальным элементом, поскольку $x^* \notin D$. Отметим, что понятие "обобщенный экстремальный элемент" можно определить, исходя с иных позиций и в книге рассматриваются различные подходы к этому понятию.

Как известно, операторным уравнением называют уравнение, в котором на неизвестный элемент u (как правило, вектор, последовательность или функция) действует некоторый известный оператор $\mathcal{L}$, отображающий пространство E в пространство F вообще говоря отличное от E. В роли пространств E и F могут выступать конечномерные или бесконечномерные линейные нормированные пространства (в частности банаховы пространства), метрические пространства, топологические векторные пространства, топологические или дифференцируемые многообразия и т.д. Перечислить все возможности для пространств E и F достаточно трудно, однако указанные варианты встречаются в функциональном анализе и его приложения наиболее часто. Операторное уравнение в общем виде представляют как уравнение

$$\mathcal{L}u = f,$$

где u — неизвестный элемент из пространства E, f — известный элемент из F, а $\mathcal{L}$ — известный оператор, действующий из пространства E в F. Первыми и важнейшими вопросами относительно операторных уравнений являются вопросы существования и единственности решения. Единственность решения гарантирует условие обратимости оператора $\mathcal{L}$, которое, во всяком случае теоретически, можно обеспечить путем соответствующей факторизации пространства E. Что касается существования, то понятно, что решение уравнения $\mathcal{L}u = f$ будет существовать только тогда, когда правая часть f будет принадлежать области значений $R(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$. Таким образом, в случае $f \in R(\mathcal{L})$ вопрос о существовании решения уравнения $\mathcal{L}u = f$ принципиально имеет положительный ответ. Однако во многих случаях f не принадлежит множеству $R(\mathcal{L})$, так что в обычном, классическом смысле это уравнение не имеет решения. Тем не менее, с практической точки зрения такие уравнения могут иметь "интуитивные" ("естественные", "физичные", "обобщенные") "решения", которые следует математически корректно определить и описать. Проблема построения обобщенных решений операторных уравнений связана, прежде всего, с задачей введения "естественного" понятия обобщенного решения уравнения $\mathcal{L}u = f$ для всех $f \in F$, в частности, и в случае, когда $f \in F \setminus R(\mathcal{L})$, а также с исследованиями свойств таких обобщенных решений. Необходимость решения этой проблемы часто обусловливаться чрезвычайной сложностью задачи описания функционального набора множества $R(\mathcal{L})$, а следовательно, невозможностью установления критериев разрешимости уравнения $\mathcal{L}u = f$. Можно сказать, что критерий разрешимости уравнения $\mathcal{L}u = f$ можно получить, только в исключительных случаях удачной исходной постановки задачи, которая может находиться достаточно далеко от практически важных формулировок. Например, уже в простейшем случае: при изучении классической разрешимости обычного дифференциального уравнения $u'(t) = f(t)$ при $1 > t > 0$ с условием $u(0) = 0$ возникает задача проверки сходимости интеграла (возможно несобственного)

$$\int_0^1 f(t)\, dt.$$

Но, как известно, общих эффективных критериев сходимости несобственных интегралов не существует.

Рассмотрим один из подходов к формализации этих решений. Предположим, что в любой ε-окрестности f (в случае топологического пространства F — в любой окрестности f) существует такой элемент f_ε, что $\mathcal{L}u_\varepsilon = f_\varepsilon$ для некоторого $u_\varepsilon \in E$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ можно считать, что $f_\varepsilon \approx \approx f$, поскольку расстояние $\rho(f_\varepsilon, f) < \varepsilon$, следовательно элемент u_ε можно принять за "обобщенное" решение операторного уравнения $\mathcal{L}u = f$ (если топологическое пространство F является неметризуемым, то эти рассуждения нужно несколько видоизменить, однако это не принципиально).

Рассмотрим на конкретных примерах проблему существования классического и обобщенного решений. Предположим, что мы хотим получить наилучшую несмещенную линейную оценку x^* неизвестного математического ожидания для непрерывного случайного процесса $x(t)$ ($t \in [0, T]$) с постоянным математически ожиданием и корреляционной функцией $K(t, s)$. Если искать эту оценку в виде

$$x^* = \int_0^T x(t)u(t)\, dt,$$

то задача сводится к отысканию решения $u(t)$ интегрального уравнения

$$\int_0^T K(t,s)u(t)\,dt = 1 \tag{1}$$

в классе функций $L_2(0,T)$. В общем случае речь может идти об уравнении

$$\int_D K(t,s)u(t)\,dt = f(s), \quad t \in \bar{D}. \tag{2}$$

Однако свойство интегрируемости с квадратом для решений таких уравнений выполняется крайне редко (см. пример [8], с. 74); например в работе [19] показано, что для стационарного случайного процесса $x(t)$, у которого корреляционная функция $K(\tau)$ обладает спектральной плотностью, уравнение (1) никогда не имеет классического решения. Тем не менее обобщенное решение у него существует. Тот факт, что интегральное уравнение (1) не имеет решения в классе функций, интегрируемых с квадратом, в некоторых случаях это можно доказать непосредственно. Например, если корреляционная функция имеет вид $K(t,s) = e^{-\beta|t-s|}$, соответствующий при дополнительном условии нормальности всех распределений вероятностей случаю стационарного марковского процесса, то при решении задачи отыскания наилучшей несмещенной оценки x^* неизвестного математического ожидания m не удается построить функцию $u(t)$, задающую оценку x^*. Для доказательства этого утверждения рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^T e^{-\beta|t-s|}\,dF(t) = \frac{2}{2+\beta T}.$$

Нетрудно проверить, что ему будет удовлетворять следующая функция ограниченной вариации

$$F(t) = \frac{\Theta(t) + \Theta(t-T) + \beta t}{2+\beta T},$$

где $\int_0^T dF(t) = 1$, а $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, т.е. функция вида:

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geqslant 0, \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что выражение

$$x^* = \frac{x(0) + x(T) + \beta \int_0^T x(t)\,dt}{2+\beta T}$$

определяет несмещенную оценку x^*, имеющую наименьшую дисперсию из всего класса несмещенных линейных оценок (на самом деле, эта оценка будет наилучшей и в значительно более широком классе оценок [8]). Поскольку оценка x^* единственная и в формулу для x^* входят дельта-функции Дирака $\delta(t)$ и $\delta(t-T)$, которые не являются элементами пространства $L_2(0,T)$, то построить функцию $u(t)$ из пространства $L_2(0,T)$, определяющую оценку x^* и являющуюся решением уравнения (1), невозможно, так что уравнение (1) не имеет классического решения в пространстве $L_2(0,T)$. Процитируем в связи этим работу [55], где четко описывается круг возникающих здесь задач: "Возникают задачи: в каком функциональном пространстве следует искать эти решения[1]? Является ли решение единственным? Будет ли решение уравнения решением задачи оценивания? Зависит ли решение непрерывным образом от исходных данных, например, от f и K? Как найти аналитическое и численное решение? Каковы свойства решения, например, каков порядок сингулярности? Как описать свойства интегрального оператора, например, в пространстве $L_2(D)$?"

Другим возможным примером ситуации в которой необходимо введение обобщенного решения может служить задача оптимального управления системой с обобщенными внешними воздействиями

$$\mathcal{L}u = f(h), \tag{3}$$

$$J(h) = \Phi(u(h), h) \underset{h}{\to} \min, \qquad h \in U, \tag{4}$$

где h — управление из допустимого множества U, $\mathcal{L} : E \to F$ — некоторый оператор, J — функционал качества. Для корректного определения этой задачи необходимо гарантировать разрешимость уравнения (3) для всех $h \in U$, то есть необходимо обеспечить включение $f(U) \subset R(\mathcal{L})$. Однако, описание области значений отображений $f, \mathcal{L}$ во многих случаях является очень сложной задачей, следовательно проверить условие $f(U) \subset R(\mathcal{L})$ бывает чрезвычайно сложно. Кроме того, часто это включение вообще не имеет места (хотя физическая интерпретация уравнения является естественной и важной для приложений). Таким образом, возникает проблема построения теории обобщенной разрешимости уравнения (3) для произвольной правой части f из множества $f(U)$, а лучше вообще для всех $f \in F$. В обобщенном смысле уравнение (3) будет иметь решение $u(h)$ для произвольного управления $h \in U$. Также понятно, что для доказательства сколь-нибудь содержательных утверждений относительно задачи минимизации (4) необходимо знать характерные свойства этих обобщенных решений.

Следует отметить, что в последнее время особое значение приобретают исследования задач управления сложными моделями, непосредственно связанными с реальными физическими и технологическими процессами и допускающими внешние воздействия сингулярного характера (применение

[1] Автор имеет в виду решения уравнения (2).

лазерной и импульсной техник, коррекция движения космических аппаратов, проектирование и использование систем микро орошения грунтов, распространение загрязнений с места экологических катастроф, задачи стабилизации плазмы, поверхностной закалки металла и т.д.). Таким образом, дополнительным аргументом в пользу рассмотрения обобщенной постановки является тот факт, что изучаемая система попадает под внешние воздействия сингулярного характера (отображение f). Сингулярность управления означает, что управляющее отображение f принимает значения из пространства обобщенных функций (именно так можно адекватно описывать важные задачи импульсного, точечного, импульсно-точечного, подвижного управлений и другие). Естественная же область значений оператора $\mathcal{L}$ традиционно не содержит обобщенных функций. Наличие сосредоточенных особенностей в пространстве и времени выводит уже на этапе формулировки такую задачу за рамки стандартных, классических постановок. В итоге мы опять приходим к необходимости разработки теории обобщенной разрешимости уравнения (3).

Особенно важной проблема построения обобщенных решений становится в случае линейного оператора $\mathcal{L}$ (часто дифференциального или интегрального), действующего в линейных топологических пространствах E, F, в частности, банаховых или гильбертовых. Необходимо заметить, что требование введения "естественного" обобщенного решения означает сохранения основных свойств оператора $\mathcal{L}$ (линейность, непрерывность, инъективность и т.д.) при его расширении на класс обобщенных решений, что существенно отличает предложенную задачу от разнообразных определений приближенных решений, псевдорешений, квазирешений и т.д. [20, 61, 63].

Для линейных дифференциальных и интегральных операторов такие задачи являются достаточно типичными и изучаются более или менее успешно уже давно. Например, введения в рассмотрение обобщенной производной С.Л. Соболева и классов соответствующих соболевских пространств решает эту проблему для классического оператора дифференцирования $\frac{d}{dt} : C^1([0,1]) \to L_2(0,1)$. В этом смысле разработку теории обобщенных функций можно рассматривать, как первый шаг в решении поставленной проблемы.

Для качественного анализа (вопросы существования и единственности) многих классических линейных моделей с обобщенными воздействиями продуктивным оказался метод априорных неравенства (Ю.М. Березанский, А.В. Бицадзе, В.П. Диденко, С.Г. Крейн и другие), который часто использовался в рамках теории оснащенных гильбертовых пространств. В роботе [2] для дифференциальных операторов эллиптического типа, действующих в соболевской дискретной шкале гильбертовых пространств, построено теорию обобщенной разрешимости, которая базируется на идеи слабых решений (в рамках теории обобщенных функций). Доказаны теоремы единственной обобщенной разрешимости эллиптических операторных уравнений для основных задач математической физики и изучены свойства гладкости обобщенных решений. Доказанные теоремы носят характер критериев разрешимости (оператор устанавливает топологический гомеоморфизм). Для различных типов уравнений математической физики теоремы единственной разрешимости (в пространствах L_2 и других) изучались во многих работах, например, в [21, 22]. Некоторые критерии разрешимости для параболического уравнения описаны в [1]. Для неклассических уравнений математической физики (дифференциальные уравнения в частных производных порядка выше второго) вопросы обобщенной разрешимости в близкой к указанной постановке рассматривались для псевдопараболического уравнения — в [30, 60], для псевдогиперболического — в [39, 46, 47, 60], для систем типа С.Л. Соболева — в [31, 42, 60], для систем пятого порядка, описывающих волновые процессы, — в [32, 33, 35, 40, 45] и во многих других работах. Многие из этих результатов описаны в монографиях [34, 74] (смотри также приведённую библиографию). Следует отметить, что в указанных работах для построения теории обобщенной разрешимости уравнений главным инструментом выступали априорные неравенства в негативных нормах, при этом обобщенное решение принадлежит некоторым гильбертовым пространствам (типа соболевских).

Для линейных интегральных операторных уравнений проблема построения обобщенного решения связана, прежде всего, с операторами Фредгольма и Вольтерра первого рода. В качестве примеров ситуаций, требующих введения обобщенных решений, для уравнения Фредгольма приведем уже упоминавшуюся нами задачу поиска наилучших несмещенных линейных оценок математического ожидания случайных процессов [8], а для уравнения Вольтерра — проблему Викселa [51, 52, 75, 79].

Следует отметить, что в многих из приведённых работ доказательство теоремы существования и единственности обобщенного решения базируется на классической идеи изучения связей между разрешимостью прямого и "сопряженного" уравнений и доказательства неравенств коэрцитивности. Таким образом, эти теоремы можно рассматривать как некоторые продолжения классических результатов С.Г. Крейна [17] и других.

Укажем на еще один важный аспект в теории обобщенных решений. Он связан не столько с отдельным уравнением (3), как со всей задачей оптимального управления (3),(4). Как известно существуют классы задач вариационного исчисления и оптимального управления, не имеющих решений среди "традиционных" множеств кривых — пространств в том или ином смысле гладких функций. Именно эта проблема решалась в классических работах по теории оптимального управления и потребовала привлечения обобщенных постановок. Общий план решения задач поиска обобщенных экстремальных кривых описан, например, в [5]) и состоит в следующем: необходимо плотно вложить пространство управления (а, следовательно, и допустимое множество управлений) в такое новое топологическое пространство, чтобы изучаемый функционал остался секвенциально непрерывным, а допустимое множество стало секвенциально компактных. Эта идея естественно связывает задачи оптимального управления с пространствами распределений Л. Шварца. Среди авторов, начавших применять идеи теории обобщенных функций к задачам вариационного исчисления и оптимального управления, следует отметить Л. Янга [69]. С точки зрения Янга пространства кривых с "традиционными" топологиями плохо приспособлены для нужд вариационного исчисления. Более удобными являются топологии, порождающие "обобщенные кривые" (по Янгу), которые эквивалентны широко известным понятиям слабых управлений и скользящих режимов. В теории оптимального управления обычными дифференциальными уравнениями слабые решения или аналогичные конструкции рассматривались Филипповым и Гамкрелидзе в [7, 65] ("скользящие режимы"), Варгой [81] ("обобщенные кривые"), Мак Шейном [76, 77] ("обобщенные управления"), Гуйла-Ури [70] ("граничные управления") и другими.

Эти результаты естественным образом порождают общую задачу поиска обобщенных экстремальных элементов для различных классов функционалов. Такая задача интересна даже в простейшем случае, когда необходимо искать экстремум непрерывного функционала, определенного на ограниченном множестве в банаховом пространстве.

Таким образом, показано, что существует значительное количество работ, посвященных проблеме введения естественного определения обобщенной разрешимости операторного уравнения или экстремальной задачи и доказательства существования и единственности таких решений. Наличие большого количества различных определений обобщенных решений и очевидные аналогии между ними дает основания предполагать, что существует некая общая конструкция-подход к построению понятия обобщенной разрешимости. По мнению авторов в данной книге найдены основные элементы такого общего подхода.

Книга состоит из предисловия, 8 глав, разбитых на параграфы, и списка использованной литературы. Нумерация определений, лемм, теорем и т.д. сквозная. Первая глава содержит перечень основных определений, понятий и вспомогательных фактов, используемых в книге. Вторая глава посвящена вступлению в теорию обобщенных решений операторных уравнений; в ней описаны простейшие схемы обобщенного решения для случая линейного оператора. В третьей главе изучается метод априорных оценок с точки зрения получения обобщенных решений. В четвертой главе описаны некоторые приложения теории обобщенной разрешимости линейных уравнений. В пятой главе разрабатываются численные алгоритмы решения линейных уравнений (прежде всего систем линейных алгебраических уравнений) и дается характеризация классического решения с помощью ряда Неймана. В шестой главе описан общий топологический метод построения обобщенных решений линейных операторных уравнений. В седьмой главе рассмотрены вопросы обобщенной разрешимости для нелинейных уравнений в метрических пространствах. Последняя восьмая глава посвящена решению вопроса о существовании обобщенных решений в экстремальных задачах.