



Глава 3

Освоение отрицательных чисел

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

- » Представление об отрицательных числах
- » Определение абсолютного значения числа
- » Сложение и вычитание отрицательных чисел
- » Умножение и деление отрицательных чисел

О *трицательные числа*, которыми обычно обозначается долг или низкая температура, представляют величины меньше нуля. Такие числа зачастую возникают при вычитании большой величины из меньшей. В этой главе поясняется, как выполнять четыре основные операции (сложения, вычитания, умножения и деления) над отрицательными числами.

О происхождении отрицательных чисел

Когда вы впервые открыли для себя операцию вычитания, то, вероятно, были предупреждены, что вычесть большее число из меньшего нельзя. Так, если у вас имеется четыре стеклянных шарика, то вам не удастся вычесть из них шесть шариков, поскольку вы не сможете изъять больше шариков, чем у вас есть на самом деле. Если это правило вполне справедливо для стеклянных

шариков, то в других случаях большее число иногда *можно* вычесть из меньшего. Так, если у вас имеются 4 доллара и вы покупаете что-нибудь за 6 долларов, то тем самым совершаете покупку в долг на 2 доллара, т.е. в вашем распоряжении остается отрицательная денежная сумма.

Число со знаком “минус” (например, -2) называется *отрицательным*. Так, число -2 можно назвать как “минус два”, или “отрицательная двойка”. Отрицательные числа находятся на числовой оси слева от нуля, как показано на рис. 3.1.

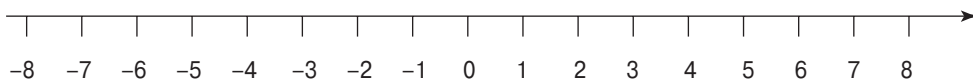


Рис. 3.1. Отрицательные числа на числовой оси

Вычитание большего числа из меньшего приобретает смысл на числовой оси. С этой целью воспользуйтесь правилом вычитания, пояснявшимся в главе 1, начав с первого вычитаемого числа и отсчитав влево по числовой оси столько раз, сколько составляет второе число.



ЗАПОМНИ!

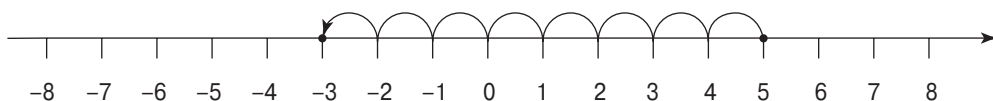
Если же в вашем распоряжении отсутствует числовая ось, то воспользуйтесь следующим правилом для вычитания большего числа из меньшего: переставьте местами оба числа, чтобы вычесть меньшее число из большего, а затем добавьте знак “минус” к полученному результату.



ПРИМЕР!

Задача. Воспользуйтесь числовой осью, чтобы выполнить вычитание $5 - 8$.

Решение. -3 . Вычитание $5 - 8$ на числовой оси означает следующее: отсчитать 8 раз *влево*, начиная с числа 5.



Задача. Чему равно $11 - 19$?

Решение. -8 . В связи с тем что число $11 < 19$, выполните вычитание $19 - 11$ и добавьте знак “минус” к полученному результату, равному 8. Следовательно, $11 - 19 = -8$.

1 Выполните вычитание следующих чисел, используя числовую ось.

а) $1 - 4 =$ _____.

б) $3 - 7 =$ _____.

в) $6 - 8 =$ _____.

г) $7 - 14 =$ _____.

2 Найдите решение следующих задач вычитания.

а) $15 - 22 =$ _____.

б) $27 - 41 =$ _____.

в) $89 - 133 =$ _____.

г) $1000 - 1234 =$ _____.

Смена знака: отрицание и абсолютное значение



ЗАПОМНИ!

Добавление знака “минус” к любому числу, означает *отрицание* этого числа. Отрицание числа означает смену его знака на противоположный. Из этого вытекает следующее.

- » Добавление знака “минус” к положительному числу делает его отрицательным.
- » Добавление знака “минус” к отрицательному числу делает его положительным. А два *подряд* знака “минус” упраздняются.
- » Добавление знака “минус” к нулю не изменяет его значение, поэтому $-0 = 0$.

В отличие от отрицания, расположение числа между двумя вертикальными чертами указывает на его абсолютное значение. *Абсолютное значение* числа обозначается расстоянием от нуля до этого числа на числовой оси, т.е. положительное значение числа независимо от того, начинается ли отсчет отрицательного или положительного числа. Из этого вытекает следующее.

- » Абсолютное значение положительного числа равно самому этому числу.
- » Абсолютное значение отрицательного числа делает его положительным.
- » Расположение числа между двумя вертикальными чертами не изменяет его значение, поэтому $|0| = 0$.
- » Указание знака “минус” за пределами вертикальных черт, обозначающих абсолютное значение, дает отрицательный результат. Например, как $-|6| = -6$, так и $-|-6| = -6$.



ПРИМЕР!

Задача. Выполните отрицание числа 7.

Решение. –7. Для отрицания числа 7 перед ним нужно поставить знак минус.

Задача. Чему равно $|9|$?

Решение. 9. Число 9 уже является положительным, поэтому абсолютное значение числа 9 также равно 9.

Задача. Найдите отрицательное значение числа –3.

Решение. 3. Отрицание числа –3 обозначается как $-(-3)$. А поскольку *два подряд* знака “минус” дают знак “плюс”, в конечном итоге получается значение 3.

Задача. Чему равно $|-17|$?

Решение. 17. Исходное число –17 является отрицательным, поэтому абсолютное значение числа –17 равно 17.

Задача. Каково отрицание выражения $7 - 12$?

Решение. 5. Выполните сначала вычитание, чтобы получить в итоге $7 - 12 = -5$. Чтобы найти отрицательное значение числа –5, добавьте знак “минус” к полученному результату: $-(-5)$. А поскольку *два подряд* знака “минус” дают знак “плюс”, то в конечном итоге получается число 5.

Задача. Каково абсолютное значение выражения $-|9 - 13| = ?$

Решение. –4. Выполните сначала вычитание: $9 - 13 = -4$, что дает отрицательное число. Поэтому абсолютное значение числа –4 равно 4. Но знак “минус”, находящийся слева от вертикальной черты в исходном выражении, отрицает этот промежуточный результат, и поэтому окончательный результат равен –4.

3 Выполните отрицание каждого из следующих чисел и выражений, добавив сначала знак “минус”, а затем упразднив по возможности знаки “минус”.

- а) 6.
- б) -29 .
- в) 0.
- г) $10 + 4$.
- д) $15 - 7$.
- е) $9 - 10$.

4 Определите абсолютное значение в следующих выражениях.

- а) $|7| = ?$
- б) $|-11| = ?$
- в) $|3 + 15| = ?$
- г) $-|10 - 1| = ?$
- д) $|1 - 10| = ?$
- е) $|0| = ?$

Сложение отрицательных чисел

Понимая назначение отрицательных чисел, их можно складывать таким же обычным способом, как и положительные числа. И в этом поможет числовая ось, где любую арифметическую операцию можно интерпретировать как последовательность перемещений влево и вправо с подъемами и спадами (см. рисунки в главе 1). Так, при сложении на числовой оси отсчет начинается от отрицательного числа таким же образом, как и от положительного.

Сложить отрицательное число — это все равно, что вычесть положительное число, т.е. переместиться *влево* по числовой оси. Это правило действует независимо от того, с какого числа начинается отсчет: с положительного или отрицательного.



СОВЕТ

Уяснив, каким образом складывать отрицательные числа на числовой оси, вы сможете подготовиться к обращению с ними и без нее. И это особенно важно, когда дело доходит до больших чисел, не вмещающихся на числовой оси. Ниже перечислены некоторые особенности сложения отрицательных чисел.

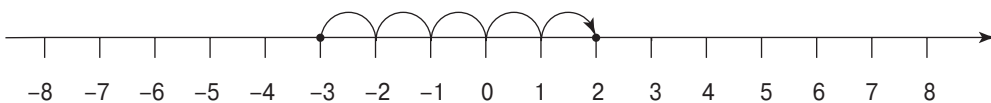
- » **Отрицательное число плюс положительное число.** Поменяйте оба числа (и их знаки) местами, превратив решаемую задачу в вычитание.
- » **Положительное число плюс отрицательное число.** Опустите знак "плюс", превратив решаемую задачу в вычитание.
- » **Сложение двух отрицательных чисел.** Опустите оба знака "минус", как будто складываются положительные числа, а затем добавьте знак "минус" к полученному результату.



ПРИМЕР!

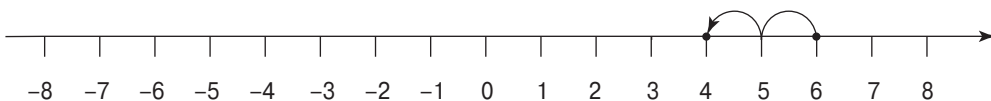
Задача. Выполните сложение $-3 + 5$, используя числовую ось.

Решение. 2. Сложение $-3 + 5$ на числовой оси означает следующее: начать с числа -3 и отсчитать 5 раз *вправо*, чтобы достичь в итоге числа 2, как показано ниже.



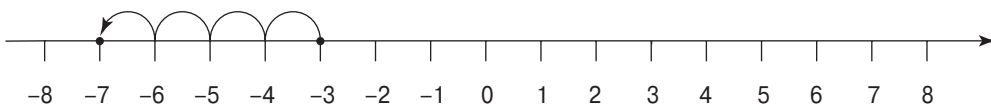
Задача. Выполните сложение $6 + (-2)$, используя числовую ось.

Решение. 4. Сложение $6 + (-2)$ на числовой оси означает следующее: начать с числа 6 и отсчитать 2 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа 4, как показано ниже.



Задача. Выполните сложение $-3 + (-4)$, используя числовую ось.

Решение. -7. Сложение $-3 + (-4)$ на числовой оси означает следующее: начать с числа -3 и отсчитать 4 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа -7 , как показано ниже.



Задача. Выполните сложение $-23 + 39$.

Решение. 16. Сначала поменяйте оба числа местами вместе с их знаками:
 $-23 + 39 = +39 - 23$.

Затем опустите знак “плюс” и воспользуйтесь знаком “минус” для вычитания:

$$39 - 23 = 16$$

5 Решите следующие задачи сложения, воспользовавшись числовой осью.

- а) $-5 + 6$.
- б) $-1 + (-7)$.
- в) $4 + (-6)$.
- г) $-3 + 9$.
- д) $2 + (-1)$.
- е) $-4 + (-4)$.

6 Решите следующие задачи сложения, не пользуясь числовой осью.

- а) $-17 + 35$.
- б) $29 + (-38)$.
- в) $-61 + (-18)$.
- г) $70 + (-63)$.
- д) $-112 + 84$.
- е) $-215 + (-322)$.

Вычитание отрицательных чисел

Вычесть отрицательное число — это все равно, что сложить положительное число, т.е. переместиться *вправо* по числовой оси. Это правило действует независимо от того, с какого числа начинается отсчет: с положительного или отрицательного.



ЗАПОМНИ!

Вычитая отрицательное число, не следует забывать, что два следующих подряд знака “минус” упраздняются, оставляя в итоге знак “плюс”. (Это можно сравнить с ситуацией, когда вы *не* можете *не* подсмеиваться над своими друзьями, поскольку они довольно смешны. В итоге вам *приходится* смеяться, потому что два отрицания подряд приводят к положительному результату.)



ЗАПОМНИ!

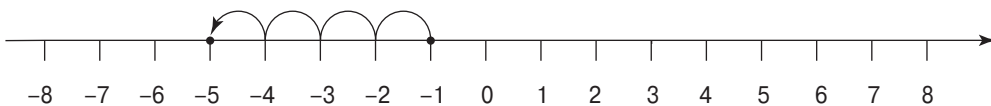
В литературе по математике отрицательное число всегда заключается в круглые скобки, если оно стоит после знака математической операции, чтобы знаки не сливались вместе: $3 - (-5)$.

Вычитая положительное число из отрицательного, опустите оба знака “минус” и сложите оба числа, как будто они положительные, а затем добавьте знак “минус” к полученному результату.



ПРИМЕР!

Задача. Выполните вычитание $-1 - 4$, воспользовавшись числовой осью.
Решение. -5 . Вычитание $-1 - 4$ на числовой оси означает следующее: начать с числа -1 и отсчитать 4 раза *влево*, чтобы достичь в итоге числа -5 , как показано ниже.



7 Решите следующие задачи вычитания, воспользовавшись числовой осью.

- а) $-3 - 4$.
- б) $5 - (-3)$.
- в) $-1 - (-8)$.
- г) $-2 - 4$.
- д) $-4 - 2$.
- е) $-6 - (-10)$.

8 Решите следующие задачи вычитания, не пользуясь числовой осью.

- а) $17 - (-26)$.
- б) $-21 - 45$.
- в) $-42 - (-88)$.
- г) $-67 - 91$.
- д) $75 - (-49)$.
- е) $-150 - (-79)$.

Учет знаков при умножении и делении отрицательных чисел

Умножение и деление отрицательных чисел, по существу, выполняется таким же образом, как и положительных чисел. Наличие одного или больше знака “минус” не изменяет числовую часть получаемого результата. Нужно лишь решить, каким должен быть знак этого результата: положительным или отрицательным.



ЗАПОМНИ!

При умножении или делении отрицательных чисел необходимо помнить следующее.

- » Если оба числа имеют *один и тот же* знак, то результат всегда положительный.
- » Если оба числа имеют *противоположные* знаки, то результат всегда отрицательный.



ПРИМЕР!

Задача. Выполните четыре следующие операции умножения.

- а) $5 \times 6 =$ _____.
- б) $-5 \times 6 =$ _____.
- в) $5 \times (-6) =$ _____.
- г) $-5 \times (-6) =$ _____.

Решение. Как следует из данного примера, числовая часть получаемого результата умножения 30 не меняется. При этом меняется лишь его знак в зависимости от знаков обоих умножаемых чисел.

- а) $5 \times 6 = 30$.
- б) $-5 \times 6 = -30$.
- в) $5 \times (-6) = -30$.
- г) $-5 \times (-6) = 30$.

Задача. Выполните четыре следующие операции деления.

- а) $18 \div 3 =$ _____.
- б) $-18 \div 3 =$ _____.
- в) $18 \div (-3) =$ _____.
- г) $-18 \div (-3) =$ _____.

Решение. Числовая часть получаемого результата деления 6 не меняется. При этом меняется лишь его знак в зависимости от знаков обоих делимых чисел.

- а) $18 \div 3 = 6$.
- б) $-18 \div 3 = -6$.
- в) $18 \div (-3) = -6$.
- г) $-18 \div (-3) = 6$.

Задача. Чему равно -84×21 ?

Решение. **-1764.** Сначала опустите знаки и умножьте оба числа:

$$84 \times 21 = 1764.$$

Числа -84 и 21 имеют разные знаки, поэтому результат их умножения отрицательный:

$$-1764.$$

Задача. Чему равно $-580 \div (-20)$?

Решение. **29.** Опустите знаки и разделите одно число на другое (можете сделать это в столбик, как пояснялось в главе 1):

$$580 \div 20 = 29.$$

Числа -580 и -20 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их деления положительный:

$$29.$$

9 Решите следующие задачи умножения.

а) $7 \times 11 =$ _____.

б) $-7 \times 11 =$ _____.

в) $7 \times (-11) =$ _____.

г) $-7 \times (-11) =$ _____.

10 Решите следующие задачи деления.

а) $32 \div (-8) =$ _____.

б) $-32 \div (-8) =$ _____.

в) $-32 \div 8 =$ _____.

г) $32 \div 8 =$ _____.

11 Чему равно -65×23 ?

12 Найдите значение выражения $-143 \times (-77)$.

13 Вычислите значение выражения $216 \div (-9)$.

14 Чему равно $-3375 \div (-25)$?

Решения задач из этой главы

Ниже приведены решения задач, представленных в этой главе в качестве упражнений, позволяющих вам применить на практике приобретенные знания.

- 1 Выполните вычитание следующих чисел, используя числовую ось.
 - а) $1 - 4 = -3$. Начните с числа 1, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.
 - б) $3 - 7 = -4$. Начните с числа 3, отсчитав 7 раз *влево* по числовой оси.
 - в) $6 - 8 = -2$. Начните с числа 6, отсчитав 8 раз *влево* по числовой оси.
 - г) $7 - 14 = -7$. Начните с числа 7, отсчитав 14 раз *влево* по числовой оси.

- 2 Найдите решение следующих задач вычитания.
 - а) $15 - 22 = -7$. Число 15 меньше числа 22, поэтому выполните вычитание $22 - 15 = 7$, добавив знак “минус” к полученному результату: -7 .
 - б) $27 - 41 = -14$. Число 27 меньше числа 41, поэтому выполните вычитание $41 - 27 = 14$, добавив знак “минус” к полученному результату: -14 .
 - в) $89 - 133 = -44$. Число 89 меньше числа 133, поэтому выполните вычитание $133 - 89 = 44$, добавив знак “минус” к полученному результату: -44 .
 - г) $1000 - 1234 = -234$. Число 1000 меньше числа 1234, поэтому выполните вычитание $1234 - 1000 = 234$, добавив знак “минус” к полученному результату: -234 .

- 3 Выполните отрицание каждого из следующих чисел и выражений, добавив сначала знак “минус”, а затем упразднив по возможности знаки “минус”.
 - а) -6 . Для отрицания числа 6 добавьте к нему знак “минус”: -6 .
 - б) 29 . Для отрицания числа -29 сначала добавьте к нему знак “минус”: $-(-29)$. Затем упраздните оба следующих подряд знака “минус”: $-(-29) = 29$.
 - в) 0 . Нуль является собственным отрицанием.
 - г) -14 . Сначала выполните сложение: $10 + 4 = 14$, а затем отрицание полученного результата: -14 .
 - д) -8 . Сначала выполните вычитание: $15 - 7 = 8$, а затем отрицание полученного результата: -8 .
 - е) 1 . Сначала выполните вычитание: $9 - 10 = -1$, а затем отрицание полученного результата: 1 .

- 4** Определите абсолютное значение в следующих выражениях.
- а) $|7| = 7$. Число 7 уже положительное, поэтому и его абсолютное значение положительное: 7.
 - б) $|-11| = 11$. Число -11 отрицательное, а его абсолютное значение положительное: 11.
 - в) $|3 + 15| = 18$. Сначала выполните сложение чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $3 + 15 = 18$. В итоге будет получен положительный результат 18, поэтому его абсолютное значение также будет положительным: 18.
 - г) $-|10 - 1| = -9$. Сначала выполните вычитание чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $10 - 1 = 9$. В итоге будет получен положительный результат 9, поэтому его абсолютное значение также будет положительным: 9. Но поскольку перед знаками вертикальной черты стоит знак “минус”, конечный результат придется отрицать, чтобы получить в итоге -9 .
 - д) $|1 - 10| = 9$. Сначала выполните вычитание чисел, находящихся между знаками вертикальной черты: $1 - 10 = -9$. В итоге будет получен отрицательный результат. Но абсолютное значение числа -9 равно 9.
 - е) $|0| = 0$. Абсолютное значение нуля равно 0.
- 5** Решите следующие задачи сложения, воспользовавшись числовой осью.
- а) $-5 + 6 = 1$. Начните с числа 5, отсчитав 6 раз *вправо* по числовой оси.
 - б) $-1 + (-7) = -8$. Начните с числа 1, отсчитав 7 раз *влево* по числовой оси.
 - в) $4 + (-6) = -2$. Начните с числа 4, отсчитав 6 раз *влево* по числовой оси.
 - г) $-3 + 9 = 6$. Начните с числа 3, отсчитав 9 раз *вправо* по числовой оси.
 - д) $2 + (-1) = 1$. Начните с числа 2, отсчитав 1 раз *влево* по числовой оси.
 - е) $-4 + (-4) = 8$. Начните с числа 4, отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.
- 6** Решите следующие задачи сложения, не пользуясь числовой осью.
- а) $-17 + 35 = 18$. Поменяйте местами оба складываемых числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу в вычитание: $-17 + 35 = 35 - 17 = 18$.
 - б) $29 + (-38) = -9$. Опустите знак “плюс”, чтобы превратить решаемую задачу в вычитание: $29 + (-38) = 29 - 38 = -9$.
 - в) $-61 + (-18) = -79$. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: $61 + 18 = 79$, а следовательно, $-61 + (-18) = -79$.

- г) $70 + (-63) = 7$. Превратите решаемую задачу в вычитание: $70 + (-63) = 70 - 63 = 7$.
- д) $-112 + 84 = -28$. Превратите решаемую задачу в вычитание: $-112 + 84 = 84 - 112 = -28$.
- е) $-215 + (-322) = -537$. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: $215 + 322 = 537$, а следовательно, $-215 + (-322) = -537$.
- 7** Решите следующие задачи вычитания, воспользовавшись числовой осью.
- а) $-3 - 4 = 7$. Начните с числа -3 , отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.
- б) $5 - (-3) = 8$. Начните с числа 5, отсчитав 3 раза *вправо* по числовой оси.
- в) $-1 - (-8) = 7$. Начните с числа -1 , отсчитав 8 раз *вправо* по числовой оси.
- г) $-2 - 4 = -6$. Начните с числа -2 , отсчитав 4 раза *влево* по числовой оси.
- д) $-4 - 2 = -6$. Начните с числа -4 , отсчитав 2 раза *влево* по числовой оси.
- е) $-6 - (-10) = 4$. Начните с числа -6 , отсчитав 10 раз *вправо* по числовой оси.
- 8** Решите следующие задачи вычитания, не пользуясь числовой осью.
- а) $17 - (-26) = 43$. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: $17 - (-26) = 17 + 26 = 43$.
- б) $-21 - 45 = -66$. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: $21 + 45 = 66$, а следовательно, $-21 - 45 = -66$.
- в) $-42 - (-88) = 46$. Опустите два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: $-42 - (-88) = -42 + 88$. Затем поменяйте местами складываемые числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу обратно в вычитание: $88 - 42 = 46$.
- г) $-67 - 91 = -158$. Опустите знаки “минус”, сложите оба числа, а затем отрицайте полученный результат: $67 + 91 = 158$, а следовательно, $-67 - 91 = -158$.
- д) $75 - (-49) = 124$. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: $75 - (-49) = 75 + 49 = 124$.
- е) $-150 - (-79) = -71$. Упраздните два подряд знака “минус”, чтобы превратить решаемую задачу в сложение: $-150 - (-79) = -150 + 79$. Затем поменяйте местами складываемые числа (вместе с их знаками), чтобы превратить решаемую задачу обратно в вычитание: $79 - 150 = -71$.
- 9** Решите следующие задачи умножения:
- а) $7 \times 11 = 77$;
- б) $-7 \times 11 = -77$;
- в) $7 \times (-11) = -77$;
- г) $-7 \times (-11) = 77$.

- 10 Решите следующие задачи деления:
- а) $32 \div (-8) = -4$;
 - б) $-32 \div (-8) = 4$;
 - в) $-32 \div 8 = -4$;
 - г) $32 \div 8 = 4$.
- 11 $-65 \times 23 = -1495$. Сначала опустите знаки “минус” и перемножьте оба числа: $65 \times 23 = 1495$. Числа 65 и 23 имеют разные знаки, поэтому результат их умножения оказывается отрицательным: **-1495**.
- 12 $-143 \times (-77) = 11\,011$. Опустите знаки “минус” и перемножьте оба числа: $143 \times 77 = 11\,011$. Числа -143 и -77 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их умножения положительный: **11 011**.
- 13 $216 \div (-9) = -24$. Опустите знаки “минус” и выполните деление (можете сделать это в столбик, как пояснялось в главе 1: $216 \div 9 = 24$). Числа 216 и -9 имеют разные знаки, поэтому результат их деления отрицательный: **-24**.
- 14 $-3375 \div (-25) = 135$. Опустите знаки “минус” и выполните деление: $3375 \div 25 = 135$. Числа -3375 и -25 имеют одинаковые знаки, поэтому результат их деления оказывается положительным: **135**.