



Глава 6

Решение текстовых задач

В ЭТОЙ ГЛАВЕ...

- » Мифы о трудностях понимания текстовых задач
- » Четыре этапа решения текстовой задачи
- » Анализ условий сложных текстовых задач
- » Замена текстовых условий числовыми выражениями
- » Анализ сложных текстовых задач с большим количеством условий

Нет ничего ужаснее решения задач, выраженных обычными словами, а не представленных в виде уравнений! С этим утверждением согласятся многие ученики первых классов, только начинающие знакомиться с математикой. Для них купание в озере, кишасщем крокодилами, покажется легкой забавой по сравнению с анализом условий задачи, выраженной в словесной форме. Вспомните, насколько сложным нам казался подсчет количества яблок, сложенных в корзину сразу несколькими людьми, или определение количества частей, на который нужно разрезать торт, чтобы его хватило на всех друзей, пришедших поздравить вас с днем рождения! Несмотря на сложность восприятия, текстовые задачи обладают важной образовательной функцией: они обучают основам логического анализа условий, заданных в повествовательной форме, позволяя выработать навык представления их в виде математических зависимостей.

В этой главе нам предстоит разоблачить мифы, которыми обрастают математические задачи, выражаемые в словесной форме. Сначала вы узнаете об основных этапах анализа условий простых текстовых задач, а затем перейдете к изучению более продвинутых методов, применяемых при решении сложных задач. В большинстве своем выполнение условий задачи заключается в проведении определенных арифметических вычислений, и только в отдельных случаях, при решении более сложных задач, расчеты выполняются на этапе анализа условий. Но не волнуйтесь: все приведенные далее примеры рассматриваются на самом детальном уровне и не вызовут недопонимания.

Заблуждения о сложности текстовых задач

Существуют два наиболее распространенных мифа о математических задачах, выраженных в словесной форме:

- » они очень сложны для понимания;
- » их решают только на уроках математики, а в реальной жизни они не встречаются.

Как вы вскоре убедитесь, неправильны оба утверждения. Но эти мифы настолько распространены, что требуют немедленного разоблачения.

Текстовые задачи не обязательно сложны для понимания

Текстовые задачи не обязательно должны быть трудными. Например, в первом классе вам наверняка доводилось решать задачи, подобные следующей:

У Адама было 4 яблока, а Ева дала ему еще 5 яблок. Сколько всего яблок теперь у Адама?

Эта задача настолько проста, что ее можно легко решить в уме, не прибегая к записи в числовом виде. Но для полноты все же распишем ее:

$$4 + 5 = 9.$$

Наконец, по требованию учителя в словесной форме можно выразить не только условие, но и решение задачи: “У Адама теперь 9 яблок”.

Чаще всего сложности в решении текстовых задач наблюдаются только при попытке решить их в уме, без предварительного анализа условий. В последующих разделах вы не только познакомитесь с методами анализа текстовых задач, но и узнаете о том, как их применять для решения задач повышенной сложности. Примеры решения математических задач, выраженных в словесной форме, будут приведены в главах 8, 13 и 23.

Текстовые задачи развивают ум

В реальности математические задачи редко формулируются в виде готовых уравнений. Чаще всего они излагаются в повествовательной форме, в которой математические данные представляются в виде набора фактов.

Все мы, независимо от рода деятельности, — дизайнер, бухгалтер, шеф-повар, гид, столяр или налоговый инспектор, — каждый день сталкиваемся с необходимостью решения самых разных математических задач. Для этого наряду с умением выполнять расчеты нужно научиться представлять условия, выражаемые в форме текстовых утверждений, в математическом виде.

Таким образом, на первом этапе решения любой математической задачи (в частности, сформулированной в текстовом виде) ее условия нужно выразить в числовом виде.

Решение простых текстовых задач

В общем случае математические задачи, выраженные в словесной форме, решаются в четыре этапа.



ЗАПОМНИ!

1. **Знакомство с задачей и построение *текстового уравнения*, допускающего использование не только чисел, но и слов.**
2. **Замена слов в полученном выше уравнении числами — там, где это возможно.**
3. **Вычисление уравнения.**
4. **Формулировка ответа на задачу.**

По мере чтения книги большую часть времени вы будете уделять п. 3 приведенного выше списка. Операции, указанные в п. 1 и 2, описаны преимущественно в этой главе, а также в главах 13, 18 и 23. Вы научитесь анализировать текстовые задачи, вычленять из них сведения, доступные для представления в числовом виде, и записывать их в формате правильно структурированных арифметических выражений.

Самый сложный и наиболее важный из перечисленных выше этапов — это замена всех текстовых условий числовыми данными. Третий пункт сводится к проведению математических расчетов, что не представляет особых трудностей, поскольку именно этому и посвящена вся книга. Последний этап уже достаточно прост, поскольку к концу решения задачи вы не только получите представление о ее сути, но и сможете с легкостью описать решение простыми словами.

Построение текстового уравнения

На первом этапе решения текстовой задачи нужно постараться представить ее условия в максимально понятном виде. Сейчас вы узнаете, как это делается.

Подстановка данных в текстовое уравнение

В большинстве текстовых задач, с которыми вам придется иметь дело, числовые данные указываются в явном виде, снабжаясь точными характеристиками: количество, размер, скорость, объем и т.п. Рассмотрим примеры:

Никита жонглирует сразу 17 булавами.

Дом имеет ширину 30 метров.

Если электричка движется со скоростью 60 км/ч, то...

Старайтесь всегда записывать условия текстовой задачи на листе бумаги. Возьмите за привычку перед занятиями выкладывать на рабочий стол стопку чистой бумаги и ручку или карандаш.

А теперь попробуем записать условие первого из представленных выше утверждений, “Никита жонглирует сразу 17 булавами”:

$$\text{Никита} = 17.$$

Теперь рассмотрим, как записать условие второго утверждения, “Дом имеет ширину 25 метров”:

$$\text{Ширина} = 30.$$

Третий пример приведен не полностью, что не мешает ему содержать ключевую информацию:

$$\text{Скорость электрички} = 60.$$



ЗАПОМНИ!

Не дайте словам ввести себя в заблуждение! Даже когда задача содержит предположение “если, то”, считайте, что условие всегда выполняется.

Выполнив описанные выше действия, можно представить условия задачи в более понятном для анализа виде, получившем название *текстового уравнения*. Несмотря на наличие знака равенства, оно менее строгое, поскольку допускает использование не только чисел, но и слов.

Определение зависимостей в текстовых уравнениях

При регулярном решении задач, выражаемых в повествовательной форме, можно заметить, что в них постоянно повторяются одни и те же слова или фразы. Например:

Богдан использует на пять булав меньше, чем Никита.
Высота дома в два раза меньше, чем его ширина.
Скорый поезд движется в три раза быстрее, чем электричка.

Конечно, вы неоднократно встречались со схожими фразами в повседневной жизни, но просто не отдавали себе отчет в том, что они имеют непосредственное отношение к математике. Их условия сформулированы в виде обычного текста, хотя их решение лежит исключительно в математической плоскости. Прежде чем приступить к вычислениям, каждую из задач нужно представить в виде текстового уравнения, в котором задействованы знаки операций. Сначала рассмотрим первый пример:

Богдан использует на пять булав меньше, чем Никита.

Мы не знаем, сколько булав у Богдана и Никиты, но нам известна их разница. Это отношение можно выразить таким уравнением:

$$\text{Богдан} + 5 = \text{Никита}.$$

Такая запись условия задачи несравненно короче исходной. И как будет показано далее, ее намного проще преобразовать в арифметическое выражение, подлежащее вычислению с помощью привычных математических действий.

Рассмотрим следующий пример:

Высота дома в два раза меньше, чем его ширина.

Опять-таки, нам не известны ни ширина, ни высота дома, но определено взаимоотношение этих характеристик. Оно легко выражается таким уравнением:

$$\text{Высота} = \text{Ширина} \div 2.$$

Аналогичный подход применяется при анализе третьего утверждения, указывающего на то, что скорый поезд движется втрое быстрее, чем электричка:

$$\text{Скорый поезд} = \text{Электричка} \cdot 3.$$



ЗАПОМНИ!

Обратите внимание на то, что в каждом из приведенных выше примеров текстовых уравнений применяется одна из четырех основных арифметических операций.

Определение цели задачи

Текстовая задача содержит вопрос, ответ на который требуется получить. Наша цель заключается в написании текстового уравнения, условие которого позволяет получить исчерпывающе правильное решение исходной задачи.

Например, вас может заинтересовать, сколько булав необходимо Богдану и Никите для одновременного жонглирования? Текстовое уравнение, представляющее такой вопрос, имеет следующий вид:

$$\text{Богдан} + \text{Никита} = ?$$

В то же время текстовое уравнение, позволяющее ответить на вопрос о высоте дома, выглядит еще проще:

$$\text{Высота} = ?$$

Наконец, приведенное ниже текстовое уравнение позволяет ответить на вопрос “Насколько скорый поезд быстрее электрички?”

$$\text{Скорый поезд} - \text{электричка} = ?$$

Замена слов числами

Конечная цель составления текстовых уравнений заключается в решении поставленной задачи. Зачастую для получения ответа числовое решение одного текстового уравнения нужно подставить в другое текстовое уравнение. В этом разделе показано, как можно использовать текстовые уравнения, полученные в предыдущем разделе, для решения трех схожих задач.

Пример 1: жонглеры — на выход!

В самых простых текстовых уравнениях применяются только операции сложения и вычитания. Например:

Богдан использует на пять булав меньше, чем Никита (он их уронил).
Никита жонглирует сразу 17 булавами. Сколькими булавами Богдан и Никита жонглируют одновременно?

Согласно проведенному выше анализу такую задачу лучше всего представляет следующая система текстовых уравнений:

$$\begin{aligned} \text{Никита} &= 17, \\ \text{Богдан} + 5 &= \text{Никита}. \end{aligned}$$

Подставляя данные из первого уравнения во второе, можно свести исходную систему всего к одному уравнению:

$$\text{Богдан} = 17 - 5 = 12.$$

Но это еще не окончательный ответ, поскольку нам нужно узнать, сколько булав используют оба жонглера одновременно:

$$\text{Никита} + \text{Богдан} = ?$$

Для вычисления последнего текстового уравнения в него нужно подставить уже известные по предыдущим уравнениям числа, замещающие слова Никита и Богдан:

$$17 + 12 = 29.$$

Теперь мы знаем, что вместе Богдан и Никита жонглируют 29 булавами.

Пример 2: дом посреди улицы

Во многих ситуациях текстовые уравнения содержат операции умножения и деления. Как, например, в следующей задаче:

Высота дома в два раза меньше, чем его ширина, составляющая 30 метров. Какова высота дома?

Следуя логике предыдущего раздела, оговоренные выше текстовые условия можно выразить в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \text{Ширина} &= 30, \\ \text{Высота} &= \text{Ширина} \div 2. \end{aligned}$$

Для получения конечного результата нужно подставить числовые данные (представляющие слово “Ширина”) из первого уравнения во второе:

$$\text{Высота} = 30 \div 2 = 15.$$

Итак, ширина дома согласно условиям текстовой задачи составляет 15 метров.

Пример 3: поезд прибывает на платформу

Следите за тем, на какой именно вопрос требуется дать ответ. В задаче может быть несколько условий, как в следующем примере:

Скорый поезд движется в три раза быстрее, чем электричка.

Если скорость электрички равна 60 км/ч, то какова разница между скоростью поезда и электрички?

Проанализировав условия текстовой задачи, можно сделать следующие выводы:

$$\begin{aligned} \text{Электричка} &= 60, \\ \text{Скорый поезд} &= \text{Электричка} \cdot 3. \end{aligned}$$

Подставим числовые данные из первого уравнения во второе:

$$\text{Скорый поезд} = 3 \cdot 60 = 180.$$

Но по условию задачи нужно определить не скорость движения поезда, а разницу между его скоростью и скоростью электрички. Разница в скоростях

определяется с помощью совершенно иного текстового уравнения, включающего операцию вычитания:

$$\text{Скорый поезд} - \text{Электричка} = ?$$

К счастью, у нас есть все числовые данные, необходимые для проведения точных расчетов, выполняемых по такой формуле:

$$180 - 60 = 120.$$

Следовательно, разница между скоростью движения поезда и электрички составляет 120 км/ч.

Решение более сложных текстовых задач

Навыки, полученные в предыдущем разделе, могут применяться не только для получения ответов на простые текстовые задачи, но и при поиске решений более сложных задач. В данном случае под сложными понимаются такие задачи:

- » требующие более точных арифметических вычислений (например, товар стоит 29,95, а не 30 долларов);
- » представленные большим количеством исходных данных (например, нужно подсчитать число булав одновременно у пяти, а не двух жонглеров).

Не стоит пугаться задач со сложными условиями. Далее вы увидите, как можно получить ответы на вопросы в задачах с длинной и запутанной формулировкой.

Проблема точности вычислений

Очень многие задачи только кажутся сложными, хотя на самом деле таковыми не являются. В частности, приведенная ниже задача по сложности не отличается от рассмотренных в предыдущем разделе.

Бабушка Евдокия прячет под матрасом 732,84 доллара, а бабушка Анна — на 234,19 доллара меньше. Сколько всего денег припрятано у бабушек?

Не будем рассуждать о том, как тяжело живется бабушкам на пенсии, а сконцентрируемся на решении задачи. Хоть мы и имеем дело с более сложными числами, порядок решения задачи будет таким же, как и в предыдущем разделе. Важные сведения содержатся уже в самом начале первого предложения:

“Бабушка Евдокия прячет под матрасом 732,84 доллара...” Это утверждение можно записать в виде следующего текстового уравнения:

$$\text{Евдокия} = 732,84 \text{ доллара.}$$

Последующие сведения — “а бабушка Анна — на 234,19 доллара меньше” — выражаются еще одним текстовым уравнением с хорошо известной вам структурой:

$$\text{Анна} = \text{Евдокия} - 234,19 \text{ доллара.}$$

В последнее уравнение нужно подставить числовое значение из первого уравнения (вместо слова “Евдокия”):

$$\text{Анна} = 732,84 \text{ доллара} - 234,19 \text{ доллара.}$$

Операция вычитания больших чисел не должна представлять для вас серьезных трудностей. Проще всего она выполняется в столбик:

$$\begin{array}{r} 732,84 \\ - 234,19 \\ \hline 498,65 \end{array}$$

Полученный результат нужно подставить в исходное текстовое уравнение:

$$\text{Анна} = 498,65 \text{ доллара.}$$

Но давайте вспомним вопрос, заданный в конце текстовой задачи. В нем спрашивается, сколько всего денег припрятали обе бабушки под матрасами? В словесной форме уравнение вычисления общей суммы выглядит так:

$$\text{Евдокия} + \text{Анна} = ?$$

Ответ, как и прежде, можно получить подстановкой в него вычисленных на предыдущих этапах числовых значений:

$$732,84 + 498,65 = ?$$

Поскольку и здесь операция сложения выполняется для больших чисел, ее, как и операцию вычитания, проще всего решить в столбик:

$$\begin{array}{r} 732,84 \\ + 498,65 \\ \hline 1231,49 \end{array}$$

Таким образом, пенсионеркам на двоих удалось накопить 1231,49 доллара.

Как видите, общий процесс решения задачи ничем не отличается от решения более простых задач в предыдущих разделах. Разница только в операциях сложения и вычитания, которые в последнем случае приходится выполнять в столбик, а не в уме.

Задачи с длинными условиями

Решая задачу со слишком длинными условиями, можно не ограничиваться одним текстовым уравнением, а представить ее системой уравнений. При первом знакомстве следующая задача выглядит весьма запутанно, но становится очень простой, если решать ее с помощью описанной ниже методики.

Сбором благотворительных средств на спасение редкого жука-скакуна, находящегося под угрозой вымирания, занимались сразу четыре сотрудницы Фонда дикой природы. Карина собрала 160 долларов, Барбаре удалось собрать на 50 долларов больше, Эмми насобирала в два раза больше, чем Барбара, а София вместе с Эмми накопили целых 700 долларов. Сколько всего денег удалось собрать на спасение жуков-скакунов?

Попытка решения этой задачи в уме скорее всего закончится полным провалом. Чтобы получить правильный результат, нужно представить каждое условие задачи отдельным текстовым уравнением, используя рекомендации из предыдущих разделов.

Вначале рассмотрим условие “Карина собрала 160 долларов”. Оно очень простое:

$$\text{Карина} = 160.$$

Далее нужно определиться с условием “Барбаре удалось собрать на 50 долларов больше”. В виде текстового уравнения оно выглядит так:

$$\text{Барбара} = \text{Карина} + 50.$$

Теперь можно переходить к описанию условия “Эмми насобирала в два раза больше, чем Барбара”:

$$\text{Эмми} = \text{Барбара} \cdot 2.$$

Наконец, нужно построить текстовое уравнение для условия “София и Эмми накопили целых 700 долларов”:

$$\text{Эмми} + \text{София} = 700.$$

Приведенные выше уравнения в полной мере описывают все заданные в условии зависимости. Для получения правильного результата вычисления нужно проводить, объединив их в единую систему уравнений. Поиск решения начнем с самого первого уравнения, в котором имя Карина сопоставляется с числом 160. Заменим этим значением имя “Карина” во всех текстовых уравнениях, в которых оно встречается:

$$\text{Барбара} = 160 + 50 = 210.$$

Получив числовое значение для имени “Барбара”, можно передать его в следующее уравнение:

$$\text{Эмми} = 210 \cdot 2 = 420.$$

Теперь, когда стало известно о сумме, собранной Эмми, можно переходить к решению последнего уравнения системы:

$$420 + \text{София} = 700.$$

Для получения окончательного результата потребуется перенести все числовые значения по одну сторону от знака равенства, заменив операцию сложения вычитанием (см. главу 4):

$$\text{София} = 700 - 420 = 280.$$

Чтобы понять, сколько всего денег удалось собрать инициативным сотрудникам Фонда, нужно построить следующее, достаточно очевидное текстовое уравнение:

$$\text{Карина} + \text{Барбара} + \text{Эмми} + \text{София} = ?$$

Подставим в него числовые значения, представляющие указанные имена в предыдущих уравнениях:

$$160 + 210 + 420 + 280 = 1070.$$

Подытожив полученный результат, можно смело утверждать, что на спасение жуков-скакунов было собрано 1070 долларов.

Обобщающий пример

Последний пример подытожит все, что мы только что изучили. Ознакомившись с условием задачи, постарайтесь вначале найти ответ самостоятельно, поэтапно анализируя утверждения и подставляя известные числовые данные в полученную систему текстовых уравнений. Подсматривать в приведенное ниже решение стоит только после того, как исчерпаете все попытки найти собственное решение. Если вам удалось получить правильный ответ, не подглядывая в книгу, то мои старания оказались не напрасными: вы получили все необходимые навыки по решению арифметических задач, выражаемых в словесной форме.

Толик приобрел в магазине шесть футболок по 19,95 доллара за штуку и двое шорт, за каждые из которых он отдал 34,60 доллара. Он также купил спортивную куртку, заплатив за нее на 37,08 доллара меньше, чем за пару шорт. Сколько сдачи он должен получить, расплатившись на кассе тремя сотенными купюрами?

Первое, что обращает на себя внимание, — это способ определения стоимости куртки. Интересно, как это было сформулировано в магазине? Несмотря на необычный способ указания цены куртки, без ее вычисления невозможно получить конечный результат. Как бы там ни было, все покупки, совершенные Толиком, описываются такой системой текстовых уравнений:

$$\text{Футболки} = 19,95 \cdot 6,$$

$$\text{Шорты} = 34,60 \cdot 2,$$

$$\text{Куртка} = \text{Шорты} - 37,08.$$

Решить это в уме, пожалуй, будет трудно. Чтобы не ошибиться, лучше прибегнуть к более надежным и проверенным методам:

$$\begin{array}{r} 19,95 \quad 34,60 \\ \times \quad 6 \quad \times \quad 2 \\ \hline 119,70 \quad 69,20 \end{array}$$

Завершив вычисления, подставим полученные результаты в исходную систему:

$$\text{Футболки} = 119,70,$$

$$\text{Шорты} = 69,20,$$

$$\text{Куртка} = \text{Шорты} - 37,08.$$

Теперь можно вычислить цену куртки, подставив в последнее уравнение стоимость шорт:

$$\text{Куртка} = 69,20 - 37,08.$$

И снова, длинные числа лучше всего вычитать в столбик:

$$\begin{array}{r} 69,20 \\ - 37,08 \\ \hline 32,12 \end{array}$$

Получается, что спортивная куртка стоит 32,12 доллара.

$$\text{Куртка} = 32,12.$$

Зная стоимость всех товаров (футболок, шорт и куртки), можно вычислить полную сумму, потраченную Толиком:

$$\text{Общая сумма} = 119,70 + 69,20 + 32,12.$$

И на этот раз метод сложения в столбик будет самым эффективным:

$$\begin{array}{r} 119,70 \\ 69,20 \\ + 32,12 \\ \hline 221,02 \end{array}$$

Но в задаче спрашивается не общая сумма покупки, а сколько сдачи получит Толик при оплате тремя сотенными купюрами. Чтобы вычислить остаток от 300 долларов, воспользуемся следующим уравнением:

$$\text{Сдача} = 300 - \text{Общая сумма.}$$

Подставив в него числовое значение общей суммы, получим конечный результат:

$$\text{Сдача} = 300 - 221,02.$$

Проведем последнее вычисление:

$$\begin{array}{r} 300,00 \\ - 221,02 \\ \hline 78,98 \end{array}$$

Таким образом, Толик получит на руки сдачу, равную 78,98 доллара.